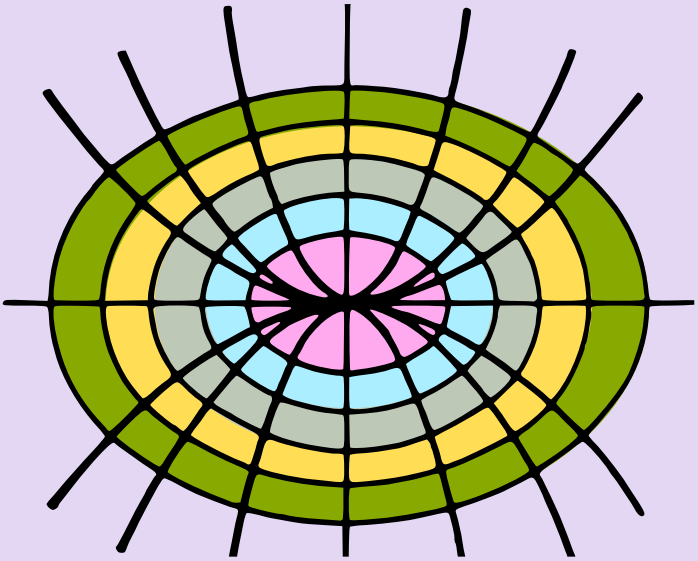
G. Baranenkov, R. Chostak, B. Démidovitch,
V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Lountz,
E. Porciinéva, E. Sytchéva, A. Yanpolski

SOUS LA DIRECTION DE B. DÉMIDOVITCH

RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES D'ANALYSE MATHÉMATIQUE



Éditions Mir Moscou

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Б. П. ДЕМИДОВИЧА

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

G. BARANENKOV, R. CHOSTAK,
B. DÉMIDOVITCH, V. EFIMENKO, S. FROLOV,
S. KOGAN, G. LOUNTZ, E. PORCHNÉVA,
E. SYTCHÉVA, A. YANPOLSKI

RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

SOUS LA DIRECTION DE
B. DÉMIDOVITCH

QUATRIÈME ÉDITION
REVUE

ÉDITIONS MIR•MOSCOU

CDU 517(076)=40

TRADUIT DU RUSSE PAR H. DAMADIAN

На французском языке

Copyright by les Editions Mir U.R.S.S. 1972

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 9

Chapitre premier. INTRODUCTION À L'ANALYSE 11

§ 1. Notion de fonction 11
§ 2. Graphiques des fonctions élémentaires 17
§ 3. Limites 24
§ 4. Infiniment petits et infiniment grands 37
§ 5. Continuité des fonctions 41

Chapitre II. DÉRIVATION DES FONCTIONS 47

§ 1. Calcul des dérivées 47
§ 2. Tableau des principales formules de dérivation et leurs applications 52
§ 3. Dérivées des fonctions qui ne sont pas données explicitement 62
§ 4. Applications géométriques et mécaniques de la dérivée 66
§ 5. Dérivées d'ordres supérieurs au premier 74
§ 6. Différentielles du premier ordre et d'ordres supérieurs 78
§ 7. Théorèmes de la moyenne 83
§ 8. Formule de Taylor 85
§ 9. Règle de Lhopital-Bernoulli pour lever les indéterminations 87

Chapitre III. EXTRÉMUMS DES FONCTIONS ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA DÉRIVÉE 92

§ 1. Extrémums d'une fonction d'une variable 92
§ 2. Concavité. Points d'inflexion 101
§ 3. Asymptotes 103
§ 4. Construction des graphiques des fonctions d'après leurs points caractéristiques 106
§ 5. Différentielle d'un arc de courbe. Courbure 113

Chapitre IV. INTÉGRALE INDÉFINIE 119

§ 1. Intégration directe 119
§ 2. Méthode de substitution 126
§ 3. Intégration par parties 130

§ 4. Intégrales simples contenant un trinôme du second degré 132
§ 5. Intégration des fonctions rationnelles 135
§ 6. Intégration de certaines fonctions irrationnelles . 140
§ 7. Intégration des fonctions trigonométriques 143
§ 8. Intégration des fonctions hyperboliques 149
§ 9. Application des substitutions trigonométriques et hyperboliques pour calculer les intégrales du type $\int R\ (x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, où R est une fonction rationnelle 150
§ 10. Intégration de différentes fonctions transcendantes. 151
§ 11. Application des « formules de récurrence » 152
§ 12. Exemples mixtes d'intégration 152

Chapitre V. INTÉGRALE DÉFINIE 155
§ 1. Intégrale définie en tant que limite de sommes . . 155
§ 2. Calcul des intégrales définies à l'aide des intégrales indéfinies 158
§ 3. Intégrales impropres 160
§ 4. Changement de variable dans une intégrale définie 165
§ 5. Intégration par parties 168
§ 6. Théorème de la moyenne 169
§ 7. Aires des figures planes 172
§ 8. Longueur d'un arc de courbe 178
§ 9. Volumes des corps 181
§ 10. Aire d'une surface de révolution 186
§ 11. Moments. Centre de gravité. Théorèmes de Guldin 189
§ 12. Application des intégrales définies à la résolution de problèmes de physique 194

Chapitre VI. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES 202
§ 1. Notions fondamentales 202
§ 2. Continuité 206
§ 3. Dérivées partielles 208
§ 4. Différentielle totale d'une fonction 211
§ 5. Dérivation des fonctions composées 214
§ 6. Dérivée dans une direction donnée et gradient d'une fonction 218
§ 7. Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs . . 222
§ 8. Intégration des différentielles totales 228
§ 9. Dérivation des fonctions implicites 231
§ 10. Changement des variables 238
§ 11. Plan tangent et normale à une surface 244
§ 12. Formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables 248
§ 13. Extrémums des fonctions de plusieurs variables 250
§ 14. Problèmes sur la détermination des plus petites et plus grandes valeurs des fonctions 256
§ 15. Points singuliers des courbes planes 259
§ 16. Enveloppes' 262
§ 17. Longueur dun arc de courbe gauche 263
§ 18. Fonction vectorielle d'une variable scalaire . . . 264
§ 19. Trièdre naturel attaché à une courbe gauche . . 268
§ 20. Courbure et torsion d'une courbe gauche 273

Chapitre VII. INTÉGRALES MULTIPLES ET INTÉGRALES CURVILIGNES 277

§ 1. Intégrale double en coordonnées rectangulaires . 277
§ 2. Changement de variables dans une intégrale double 284
§ 3. Calcul des aires 288
§ 4. Calcul des volumes 290
§ 5. Calcul des aires des surfaces 292
§ 6. Applications mécaniques de l'intégrale double . . 292
§ 7. Intégrales triples 295
§ 8. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre. Intégrales multiples impropres 303
§ 9. Intégrales curvilignes 307
§ 10. Intégrales de surface 319
§ 11. Formule d'Ostrogradski-Gauss 323
§ 12. Eléments de la théorie du champ 324

Chapitre VIII. SÉRIES 331

§ 1. Séries numériques 331
§ 2. Séries de fonctions 344
§ 3. Série de Taylor 352
§ 4. Séries de Fourier 360

Chapitre IX. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES . . . 366

§ 1. Solutions. Equations différentielles de famille de courbes. Conditions initiales 366
§ 2. Equations différentielles du premier ordre 369
§ 3. Equations différentielles du premier ordre à variables séparables. Trajectoires orthogonales 371
§ 4. Equations différentielles homogènes du premier ordre 375
§ 5. Equations linéaires du premier ordre. Equations de Bernoulli 377
§ 6. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant 380
§ 7. Equations différentielles du premier ordre non résolubles par rapport à la dérivée 383
§ 8. Equations de Lagrange et de Clairaut 385
§ 9. Exercices mixtes sur les équations différentielles du premier ordre 387
§ 10. Equations différentielles d'ordres supérieurs . . . 393
§ 11. Equations différentielles linéaires 397
§ 12. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 399
§ 13. Equations différentielles linéaires d'ordres supérieurs au second à coefficients constants 405
§ 14. Equations d'Euler 406
§ 15. Systèmes d'équations différentielles 408
§ 16. Intégration des équations différentielles à l'aide de séries entières 411
§ 17. Problèmes sur la méthode de Fourier 413

Chapitre X. CALCUL NUMÉRIQUE 417

§ 1. Opérations sur des nombres approchés 417
§ 2. Interpolations des fonctions 423
§ 3. Calcul des racines réelles des équations 427
§ 4. Intégration numérique 434
§ 5. Intégration numérique des équations différentielles 437
§ 6. Calcul approché des coefficients de Fourier 448

RÉPONSES 450

Chapitre I premier 450
Chapitre II 456
Chapitre III 465
Chapitre IV 474
Chapitre V 488
Chapitre VI 497
Chapitre VII 509
Chapitre VIII 521
Chapitre IX 531
Chapitre X 543

APPENDICES 546

I. Alphabet grec 546
II. Quelques constantes remarquables 546
III. Grandeurs inverses, puissances, racines, logarithmes 547
IV. Fonctions trigonométriques 549
V. Fonctions exponentielles, hyperboliques et trigonométriques 550
VI. Quelques courbes remarquables 551

AVANT-PROPOS

Ce recueil rassemble des problèmes et des exemples d'analyse mathématique prévus pour un programme maximum du cours général de mathématiques des écoles supérieures techniques. Il contient plus de 3000 problèmes systématiquement répartis en dix chapitres et embrasse les différentes parties du cours de mathématiques supérieures des écoles supérieures techniques (excepté la géométrie analytique). Une attention particulière y est portée sur les parties les plus importantes du cours qui exigent un entraînement certain au calcul des limites, à la technique de la dérivation, à la construction des graphiques des fonctions, à la technique d'intégration, aux applications des intégrales définies, aux séries, à l'intégration des équations différentielles.

Prenant en considération le fait que dans certaines écoles supérieures techniques des chapitres additifs au cours de mathématiques sont enseignés, les auteurs ont inclus adans ce livre des problèmes sur la théorie du champ, la méthode de Fourier et le calcul numérique. Comme l'a prouvé la pratique de l'enseignement, le nombre de problèmes figurant dans le recueil répond non seulement aux besoins des étudiants quant à l'assimilation pratique du cours de mathématiques, mais donne aussi au professeur la possibilité de varier le choix des problèmes dans chaque partie du cours pour la récapitulation et les épreuves de contrôle.

Chaque chapitre comporte une introduction théorique donnant les principales définitions et formules se rapportant au chapitre en question ainsi que des modèles de solutions de problèmes types particulièrement importants. A notre sens, cela facilitera, dans une certaine mesure, la tâche de l'étudiant qui fera usage de ce manuel lors de ses travaux individuels. On donne les réponses à tous les problèmes de calcul ; dans les réponses aux problèmes marqués d'un astérisque (*) ou de deux astérisques (**), on donne soit des indications sommaires pour les résoudre, soit la solution elle-même. Des graphiques illustrent certains problèmes pour les mettre plus en évidence.

Ce recueil est le fruit d'un long travail pédagogique des auteurs qui durant de nombreuses années ont enseigné les mathématiques dans les écoles supérieures techniques de l'Union Soviétique. Outre les problèmes et les exemples originaux qu'il contient, de nombreux problèmes universellement connus y sont aussi insérés.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION À L'ANALYSE

§ 1. Notion de fonction

1°. Nombres réels. Les nombres rationnels et les nombres irrationnels sont appelés nombres *réels*. On appelle *valeur absolue* d'un nombre réel a un nombre non négatif noté $|a|$, défini comme suit: $|a| = a$, si $a \geqslant 0$, et $|a| = -a$, si $a < 0$. Quels que soient les deux nombres réels a et b l'inégalité

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

est vraie.

2°. Définition de la notion de fonction. Si à chaque valeur*) de la grandeur variable x appartenant à un ensemble E correspond une et seulement une valeur finie de la grandeur y, on dit alors que y est une *fonction* (uniforme ou univoque) de x ou de la *variable dépendante* définie sur l'ensemble E; x s'appelle la *variable indépendante*. La relation « y est fonction de x » s'écrira de la manière suivante: $y = f(x)$ ou $y = F(x)$, etc.

Si à chaque valeur x appartenant à un ensemble E il correspond une ou plusieurs valeurs de la grandeur variable y, on dit alors que y est une *fonction multiforme* ou *multivoque* de x définie sur l'ensemble E. Sauf mention contraire, les fonctions considérées seront toutes supposées uniformes.

3°. Domaine d'existence d'une fonction. L'ensemble des valeurs x pour lesquelles une fonction donnée est définie s'appelle *domaine d'existence* ou *domaine de définition* de cette fonction. Dans des cas les plus simples, le domaine d'existence d'une fonction peut être: soit un *intervalle fermé* (*segment*) $[a, b]$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x satisfaisant aux inégalités $a \leqslant x \leqslant b$; soit un *intervalle ouvert* (*intervalle*) (a, b), c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels vérifiant les inégalités $a < x < b$. On peut rencontrer des structures encore plus compliquées des domaines d'existence des fonctions (voir, par exemple, exercice 21).

Exemple 1. Déterminer le domaine d'existence de la fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

---

*) Par la suite, sauf mention contraire, toutes les valeurs des grandeurs considérées seront supposées réelles.

S o l u t i o n. La fonction est définie si

$$x^2 - 1 > 0,$$

c'est-à-dire si $|x| > 1$. Ainsi, les deux intervalles ouverts $-\infty < x < -1$ et $1 < x < +\infty$ constituent le domaine d'existence de cette fonction.

4°. F o n c t i o n s i n v e r s e s. Si l'équation $y = f(x)$ peut être résolue d'une manière unique par rapport à la variable x, c'est-à-dire s'il existe une fonction $x = g(y)$ telle que $y \equiv f[g(y)]$, alors la fonction $x = g(y)$ ou, revenant aux notations usuelles, la fonction $y = g(x)$ s'appelle fonction *inverse* de la fonction $y = f(x)$. Il est évident que $g[f(x)] \equiv x$, c'est-à-dire que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont *réciproquement inverses* l'une de l'autre.

Dans le cas général l'équation $y = f(x)$ définit une fonction inverse multiforme $x = f^{-1}(y)$ telle que $y \equiv f(f^{-1}(y))$ pour tous es y, valeurs de la fonction $f(x)$.

E x e m p l e 2. Déterminer la fonction inverse de la fonction

$$y = 1 - 2^{-x}.$$

S o l u t i o n. Nous trouvons en résolvant l'équation (1) par rapport à x

$$2^{-x} = 1 - y \qquad \text{et}$$

$$x = \frac{\lg(1-y)}{\lg 2}\ ^{*)}. \tag{2}$$

Il est évident que l'intervalle $-\infty < y < 1$ est le domaine de définition de la fonction (2).

5°. F o n c t i o n s c o m p o s é e s e t f o n c t i o n s i m p l i c i t e s. Toute fonction y de x donnée par l'égalité $y = f(u)$ où $u = \varphi(x)$, etc., s'appelle fonction *composée* ou *fonction de fonction*.

Une fonction donnée par une équation nonue résolue par rapport à la variable dépendante s'appelle fonction *implicite*. Par exemple, l'équation $x^3 + y^3 = 1$ définit y comme une fonction implicite de x.

6°. R e p r é s e n t a t i o n g r a p h i q u e d'u n e f o n c t i o n. L'ensemble des points (x, y) du plan XOY dont les coordonnées sont liées entre elles par l'équation $y = f(x)$ est appelé *le graphique* de la fonction considérée.

1**. Démontrer que si a et b sont des nombres réels on a

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

2. Démontrer les égalités suivantes:

a) $|ab| = |a| \cdot |b|$; c) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;

b) $|a|^2 = a^2$; d) $\sqrt{a^2} = |a|$.

---

*) $\lg x = \log_{10} x$ désigne le logarithme dans la base 10 du nombre x. $\ln x = \log_e x$ désigne le logarithme dit « naturel » dont la base est le nombre $e = 2{,}71828$. (Certains auteurs préfèrent le désigner par Log x. *N.R.*)

3. Résoudre les inégalités:

$$\text{a) } |2x+1|<1; \quad \text{b) } |x-1|<|x+1|.$$

4. Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ si $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

5. Calculer $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

6. Sois $f(x)=\arccos(\lg x)$. Calculer $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

7. Soit $f(x)$ une fonction linéaire. Déterminer cette fonction si $f(-1)=2$ et $f(2)=-3$.

8. Déterminer une fonction entière rationnelle $f(x)$ du deuxième degré si $f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f(3)=5$.

9. On donne $f(4)=-2$, $f(5)=6$. Calculer la valeur approchée de $f(4,3)$ supposant la fonction $f(x)$ linéaire pour $4\leqslant x\leqslant 5$ (*interpolation linéaire*).

10. En s'aidant de la valeur absolue, exprimer la fonction

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{pour } x\leqslant 0, \\ x, & \text{pour } x>0, \end{cases}$$

à l'aide d'une seule formule.

Déterminer le domaine d'existence des fonctions:

11. a) $y=\sqrt{x+1}$; b) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

12. $y=\frac{1}{4-x^2}$.

13. a) $y=\sqrt{x^2-2}$; b) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14.** $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$.

17. $y=\lg\frac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$.

20. $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

21. Déterminer le domaine d'existence de la fonction

$$y=\sqrt{\sin 2x}.$$

22. $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$. Trouver $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ et $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

23. La fonction $f(x)$ définie dans le domaine symétrique $-l<x<l$ est dite *paire* si $f(-x)=f(x)$ et *impaire* si $f(-x)=-f(x)$.

Parmi les fonctions données ci-dessous, indiquer celles qui sont paires et celles qui sont impaires:

a) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

b) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

d) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

24*. Démontrer que chaque fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle $-l<x<l$, peut être mise sous la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

25. Démontrer que le produit de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires est une fonction paire et que le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est une fonction impaire.

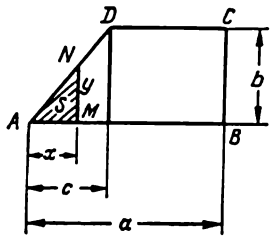


Fig. 1

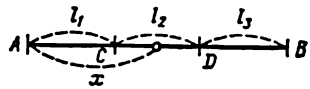


Fig. 2

26. La fonction $f(x)$ est dite *périodique* s'il existe un nombre positif T (*période de la fonction*) tel que $f(x+T)=f(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine d'existence de la fonction $f(x)$.

Parmi les fonctions données ci-dessous, indiquer celles qui sont périodiques et calculer leur plus petite période T:

a) $f(x)=10\sin 3x$;

b) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$;

c) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

d) $f(x)=\sin^2 x$;

e) $f(x)=\sin\sqrt{x}$.

27. Exprimer la longueur du segment $y=MN$ et l'aire S de la figure AMN en fonction de $x=AM$ (fig. 1). Construire le graphique de ces fonctions.

28. La densité linéaire (c'est-à-dire la masse de l'unité de longueur) d'une tige $AB = l$ (fig. 2) est respectivement égale à q_1, q_2 et q_3 pour les segments $AC = l_1$, $CD = l_2$ et $DB = l_3$ $(l_1 + l_2 + l_3 = l)$. Exprimer en fonction de x la masse du segment de longueur variable $AM = x$ de cette tige. Construire le graphique de cette fonction.

29. Trouver $\varphi[\psi(x)]$ et $\psi[\varphi(x)]$ si $\varphi(x) = x^2$ et $\psi(x) = 2^x$.

30. Trouver $f\{f[f(x)]\}$ si $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

31. Trouver $f(x+1)$ si $f(x-1) = x^2$.

32. Supposons que $f(n)$ soit la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. Montrer que

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

33. Montrer que si

$$f(x) = kx + b$$

et que si les nombres x_1, x_2, x_3 forment une progression arithmétique, alors les nombres $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$ forment aussi une progression arithmétique.

34. Démontrer que si $f(x)$ est l'exponentielle $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ et si les nombres x_1, x_2, x_3 forment une progression arithmétique, alors les nombres $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$ en forment aussi une.

35. Soit

$$f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}.$$

Montrer que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. Soient $\varphi(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ et $\psi(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$.

Montrer que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$$

et

$$\psi(x+y) = \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x).$$

37. Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, si

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & \text{pour } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant +\infty. \end{cases}$$

38. Calculer les racines positives et les racines négatives de la fonction y si :

a) $y=1+x$;

b) $y=2+x-x^2$;

c) $y=1-x+x^2$;

d) $y=x^3-3x$;

e) $y=\lg\frac{2x}{1+x}$.

39. Déterminer la fonction inverse de y si :

a) $y=2x+3$;

b) $y=x^2-1$;

c) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

d) $y=\lg\frac{x}{2}$;

e) $y=\operatorname{arctg} 3x$.

Quels sont les domaines de définition de ces fonctions inverses?

40. Etant donné la fonction

$$y=\begin{cases} x, & \text{pour } x\leqslant 0, \\ x^2, & \text{pour } x>0, \end{cases}$$

trouver sa fonction inverse.

41. Mettre les fonctions données sous forme d'une suite d'égalités telles que chaque terme de cette suite soit constitué d'une fonction élémentaire (puissance, exponentielle, trigonométrique, etc.) :

a) $y=(2x-5)^{10}$;

b) $y=2^{\cos x}$;

c) $y=\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

d) $y=\arcsin(3^{-x^2})$.

42. Les fonctions composées sont données par une suite d'égalités. Les écrire à l'aide d'une seule égalité :

a) $y=u^2$, $u=\sin x$;

b) $y=\operatorname{arctg} u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$;

c) $y=\begin{cases} 2u, & \text{si } u\leqslant 0, \\ 0, & \text{si } u>0 ; \end{cases}$

$u=x^3-1$.

43. Trouver l'expression explicite des fonctions y données par les équations:

a) $x^2 - \arccos y = \pi$;

b) $10^x + 10^y = 10$;

c) $x + |y| = 2y$.

Déterminer leurs domaines d'existence.

§ 2. Graphiques des fonctions élémentaires

On construit habituellement le graphique d'une fonction $y = f(x)$ en se donnant un réseau de points suffisamment dense $M_i(x_i, y_i)$ où $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ et en réunissant ces points par une

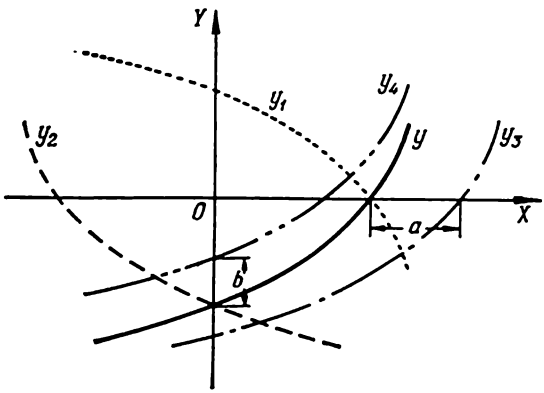


Fig. 3

courbe qui prend en considération la position des points intermédiaires. L'emploi de la règle à calcul est recommandé pour les calculs.

La construction des graphiques en général est facilitée par la connaissance des graphiques des principales fonctions élémentaires (voir appendice VI). En partant du graphique Γ de la fonction

$$y = f(x)$$

et à l'aide de constructions géométriques élémentaires, on construit le graphique des fonctions suivantes:

1) $y_1 = -f(x)$, le graphique Γ a subi une symétrie par rapport à l'axe OX;

2) $y_2 = f(-x)$, le graphique Γ a subi une symétrie par rapport à l'axe OY;

3) $y_3 = f(x - a)$, le graphique Γ est translaté suivant l'axe OX de la grandeur a;

4) $y_4 = b + f(x)$, le graphique Γ est translaté suivant l'axe OY de la grandeur b (fig. 3).

Exemple. Construire le graphique de la fonction

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Solution. La courbe cherchée est la sinusoïde $y = \sin x$

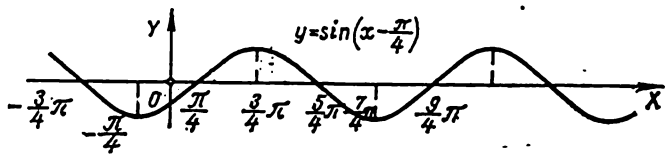


Fig. 4

translatée vers la droite suivant l'axe OX de la quantité $\frac{\pi}{4}$ (fig. 4).

Construire les graphiques des fonctions linéaires (*droites*):

44. $y = kx$, si $k = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2$.

45. $y = x + b$, si $b = 0, 1, 2, -1, -2$.

46. $y = 1{,}5x + 2$.

Construire les graphiques des fonctions rationnelles entières du second degré (*paraboles*):

47. $y = ax^2$, si $a = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$.

48. $y = x^2 + c$, si $c = 0, 1, 2, -1$.

49. $y = (x - x_0)^2$, si $x_0 = 0, 1, 2, -1$.

50. $y = y_0 + (x - 1)^2$, si $y_0 = 0, 1, 2, -1$.

51*. $y = ax^2 + bx + c$, si 1) $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; 2) $a = -2$, $b = 6$, $c = 0$.

52. $y = 2 + x - x^2$. Déterminer les points d'intersection de cette parabole avec l'axe OX.

Construire les graphiques des fonctions entières rationnelles de degrés supérieurs à deux:

53*. $y = x^3$ (*parabole cubique*).

54. $y = 2 + (x - 1)^3$.

55. $y = x^3 - 3x + 2$.
56. $y = x^4$.
57. $y = 2x^2 - x^4$.

Construire les graphiques des fonctions homographiques (*hyperboles*) :

58*. $y = \frac{1}{x}$.

59. $y = \frac{1}{1-x}$.

60. $y = \frac{x-2}{x+2}$.

61*. $y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}$, avec $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $m = 6$.

62*. $y = \frac{2x-3}{3x+2}$.

Construire les graphiques des fonctions rationnelles :

63. $y = x + \frac{1}{x}$.

64. $y = \frac{x^2}{x+1}$.

65*. $y = \frac{1}{x^2}$.

66. $y = \frac{1}{x^3}$.

67*. $y = \frac{10}{x^2+1}$ («*l'agnésienne*»).

68. $y = \frac{2x}{x^2+1}$ («*serpentin de Newton*»).

69. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

70. $y = x^3 + \frac{1}{x}$ («*trident de Newton*»).

Construire les graphiques des fonctions irrationnelles :

71*. $y = \sqrt{x}$.

72. $y = \sqrt[3]{x}$.

73*. $y = \sqrt[3]{x^2}$ («*parabole de Neile*»).

74. $y = \pm x\sqrt{x}$ («*parabole semi-cubique*»).

75*. $y = \pm \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ (*ellipse*).

76. $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (*hyperbole*).

77. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

78*. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (*cissoïde de Dioclès*).

79. $y=\pm x\sqrt{25-x^2}$.

Construire les graphiques des fonctions trigonométriques:

80*. $y=\sin x$.

81*. $y=\cos x$.

82*. $y=\operatorname{tg} x$.

83*. $y=\operatorname{ctg} x$.

84*. $y=\sec x$.

85*. $y=\operatorname{cosec} x$.

86. $y=A\sin x$, si $A=1,\ 10,\ \frac{1}{2},\ -2$.

87*. $y=\sin nx$, si $n=1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2}$.

88. $y=\sin(x-\varphi)$, si $\varphi=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \pi,\ -\frac{\pi}{4}$.

89*. $y=5\sin(2x-3)$.

90*. $y=a\sin x+b\cos x$, si $a=6,\ b=-8$.

91. $y=\sin x+\cos x$.

92*. $y=\cos^2 x$.

93*. $y=x+\sin x$.

94.* $y=x\sin x$.

95. $y=\operatorname{tg}^2 x$.

96. $y=1-2\cos x$.

97. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

98. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

99*. $y=\cos\frac{\pi}{x}$.

100. $y=\pm\sqrt{\sin x}$.

Construire les graphiques des fonctions puissances et des fonctions logarithmiques:

101. $y = a^x$, si $a = 2, \frac{1}{2}, e\ (e = 2{,}718\ldots)$*).

102*. $y = \log_a x$, si $a = 10, 2, \frac{1}{2}, e$.

103*. $y = \operatorname{sh} x$, où $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

104*. $y = \operatorname{ch} x$, où $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

105*. $y = \operatorname{th} x$, où $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

106. $y = 10^{\frac{1}{x}}$.

107*. $y = e^{-x^2}$ (*courbe en cloche*).

108. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$.

109. $y = \lg x^2$.

110. $y = \lg^2 x$.

111. $y = \lg(\lg x)$.

112. $y = \frac{1}{\lg x}$.

113. $y = \lg \frac{1}{x}$.

114. $y = \lg(-x)$.

115. $y = \log_2(1 + x)$.

116. $y = \lg(\cos x)$.

117. $y = 2^{-x} \sin x$.

Construire les graphiques des fonctions trigonométriques inverses:

118*. $y = \arcsin x$.

119*. $y = \arccos x$.

120*. $y = \operatorname{arctg} x$.

121*. $y = \operatorname{arcctg} x$.

---

*) A propos du nombre e voir page 26.

122. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

123. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

124. $y = x + \operatorname{arcctg} x$.

Construire les graphiques des fonctions:

125. $y = |x|$.

126. $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$.

127. a) $y = x|x|$; b) $y = \log_{\sqrt{2}} |x|$.

128. a) $y = \sin x + |\sin x|$; b) $y = \sin x - |\sin x|$.

129. $y = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{pour } |x| \leqslant 1, \\ \frac{2}{|x|}, & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$

130. a) $y = [x]$, b) $y = x - [x]$, où par $[x]$ on note la partie entière du nombre x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier plus petit ou égal à x.

Construire les graphiques des fonctions données en coordonnées polaires (r, φ) $(r \geqslant 0)$:

131. $r = 1$.

132*. $r = \frac{\varphi}{2}$ (*spirale d'Archimède*).

133*. $r = e^{\varphi}$ (*spirale logarithmique*).

134*. $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (*spirale hyperbolique*).

135. $r = 2 \cos \varphi$ (*circonférence*).

136. $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ (*droite*).

137. $r = \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (*parabole*).

138*. $r = 10 \sin 3\varphi$ (*rosace à trois boucles*).

139*. $r = a(1 + \cos \varphi)$ $(a > 0)$ (*cardioïde*).

140*. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $(a > 0)$ (*lemniscate*).

Construire les graphiques des fonctions données sous forme paramétrique:

141*. $x = t^3$, $y = t^2$ (*parabole semi-cubique*).

142*. $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (*ellipse*).

143*. $x = 10 \cos^3 t$, $y = 10 \sin^3 t$ (*astroïde*).

144*. $x = a (\cos t + t \sin t)$, $y = a (\sin t - t \cos t)$ (*développante de cercle*).

145*. $x = \frac{at}{1+t^3}$, $y = \frac{at^2}{1+t^3}$ (*folium de Descartes*).

146. $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$ (*demi-circonférence*).

147. $x = 2^t + 2^{-t}$, $y = 2^t - 2^{-t}$ (*branche d'hyperbole*).

148. $x = 2 \cos^2 t$, $y = 2 \sin^2 t$ (*segment de droite*).

149. $x = t - t^2$, $y = t^2 - t^3$.

150. $x = a (2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a (2 \sin t - \sin 2t)$ (*cardioïde*).

Construire les graphiques des fonctions données sous forme implicite:

151*. $x^2 + y^2 = 25$ (*cercle*).

152. $xy = 12$ (*hyperbole*).

153*. $y^2 = 2x$ (*parabole*).

154. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ (*ellipse*).

155. $y^2 = x^2 (100 - x^2)$.

156*. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*astroïde*).

157*. $x + y = 10 \lg y$.

158. $x^2 = \cos y$.

159*. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}}$ («*spirale logarithmique*»).

160*. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ («*folium de Descartes*»).

161. Etablir la formule qui permet de passer de l'échelle Celsius (C) à l'échelle Fahrenheit (F), si on sait qu'à 0° C correspondent 32° F et qu'à 100° C correspondent 212° F. Construire le graphique de la fonction obtenue.

162. Un rectangle est inscrit dans un triangle de base $b = 10$ et de hauteur $h = 6$ (fig. 5). Exprimer l'aire y de ce rectangle en fonction de sa base x.

Construire le graphique de cette fonction et trouver sa plus grande valeur.

163. Dans le triangle ACB le côté $BC = a$, le côté $AC = b$ et l'angle variable $\widehat{ACB} = x$ (fig. 6).

Exprimer l'aire y du triangle ABC en fonction de x Construire le graphique de cette fonction et trouver sa plus grande valeur.

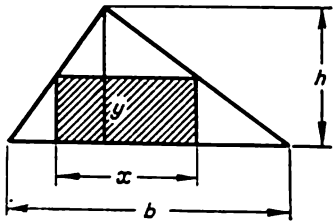


Fig. 5

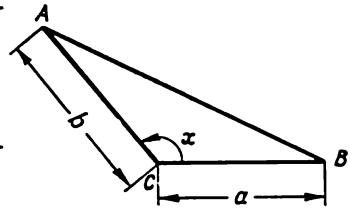


Fig. 6

164. Résoudre graphiquement les équations:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; d) $10^{-x} = x$;

b) $x^3 + x - 1 = 0$; e) $x = 1 + 0{,}5 \sin x$;

c) $\lg x = 0{,}1x$; f) $\operatorname{ctg} x = x$ $(0<x<\pi)$.

165. Résoudre graphiquement les systèmes d'équations:

a) $xy = 10,\ x + y = 7$;

b) $xy = 6,\ x^2 + y^2 = 13$;

c) $x^2 - x + y = 4,\ y^2 - 2x = 0$;

d) $x^2 + y = 10,\ x + y^2 = 6$;

e) $y = \sin x,\ y = \cos x$ $(0 < x < 2\pi)$.

§ 3. Limites

1°. Limite d'une suite. Le nombre a est dit *limite de la suite* $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ ou

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ pour } n > N.$$

Exemple 1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2. \qquad (1)$$

S o l u t i o n. Formons la différence

$$\frac{2n+1}{n+1}-2=-\frac{1}{n+1}.$$

Nous avons en évaluant la valeur absolue de cette différence :

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon \tag{2}$$

si

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N(\varepsilon).$$

Ainsi, pour chaque nombre positif ε on peut trouver un nombre $N=\frac{1}{\varepsilon}-1$ tel que pour $n>N$, l'inégalité (2) est satisfaite. Par conséquent, le nombre 2 est la limite de la suite $x_n=\frac{2n+1}{n+1}$, c'est-à-dire que la formule (1) est vraie.

2°. L i m i t e d'u n e f o n c t i o n. On dit que la fonction $f(x)\to A$ pour $x\to a$ (A et a sont des nombres) ou

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,$$

si, pour chaque $\varepsilon>0$ arbitraire, il existe un nombre $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tel que

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad 0<|x-a|<\delta.$$

D'une manière analogue, on définit

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=A,$$

si $|f(x)-A|<\varepsilon$ pour $|x|>N(\varepsilon)$.

On utilisera de même la notation conventionnelle suivante

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

qui veut dire que $|f(x)|>E$ pour $0<|x-a|<\delta(E)$, où E est un nombre arbitraire positif.

3°. L i m i t e à d r o i t e e t l i m i t e à g a u c h e. On convient d'écrire $x\to a-0$ si $x<a$ et $x\to a$; de même, $x\to a+0$ si $x>a$ et $x\to a$. Les nombres

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x) \quad \text{et} \quad f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

s'appellent respectivement *limite à gauche* et *limite à droite* de la fonction $f(x)$ au point a (si ces nombres existent).

Pour l'existence de la limite d'une fonction $f(x)$ lorsque $x\to a$ il faut et il suffit que soit vérifiée l'égalité

$$f(a-0)=f(a+0).$$

Si les limites $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ existent, on a les théorèmes suivants :

1) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\,f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)/f_2(x)]=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ $\quad(\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0)$.

Les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2{,}71828\ldots$$

sont fréquemment employées.

Exemple 2. Trouver les limites à droite et à gauche de la fonction

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

pour $x\to 0$.

Solution. On a

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

et

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Il est évident que pour $x\to 0$ la limite de la fonction $f(x)$ n'existe pas.

166. Démontrer que pour $n\to\infty$ la limite de la suite

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots$$

est égale à 0. Pour quelles valeurs de n l'inégalité

$$\frac{1}{n^2}<\varepsilon$$

est vérifiée (ε étant un nombre positif arbitraire)?

Effectuer le calcul numérique pour a) $\varepsilon=0{,}1$; b) $\varepsilon=0{,}01$; c) $\varepsilon=0{,}001$.

167. Démontrer que la limite de la suite

$$x_n=\frac{n}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

pour $n \to \infty$ est égale à 1. Pour quelles valeurs de $n > N$ l'inégalité

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

est vérifiée (ε étant un nombre arbitraire positif)?

Déterminer N si a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

168. Démontrer que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Pour ε positif donné déterminer le nombre positif δ pour que de l'inégalité

$$|x - 2| < \delta$$

découle l'inégalité

$$|x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Calculer δ, si a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

169. Expliciter le véritable sens des écritures conventionnelles suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to +0} \lg x = -\infty$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

170. Trouver les limites des suites:

a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$;

b) $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$;

c) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$;

d) 0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; ...

Trouver les limites:

171. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

172. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

173. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right]$.

174. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

175. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

176. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$.

177. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$.

178*. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

180. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$.

Lorsqu'on veut déterminer la limite du rapport de deux polynômes en x pour $x \to \infty$, il est avantageux de diviser le numérateur et le dénominateur par x^n, n étant le plus grand des degrés de ces deux polynômes.

On peut souvent appliquer un procédé analogue aux fractions contenant des quantités irrationnelles.

Exemple 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3} = 8.$$

Exemple 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = 1.$

181. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

182. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1000x}{x^2-1}$.

183. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

184. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

186. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

187. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

188. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

189. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

190. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes et $P(a) \neq 0$ ou $Q(a) \neq 0$, la limite de la fraction rationnelle

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se détermine directement.

Si $P(a) = Q(a) = 0$, il est recommandé alors de simplifier la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ par le binôme $x - a$ autant de fois qu'il le faudra.

Exemple 3.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

191. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

192. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

193. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

194. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

195. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

196. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

197. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

198. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

Les expressions qui contiennent des irrationnalités peuvent être ramenées dans de nombreux cas à des expressions rationnelles par l'introduction d'une nouvelle variable.

Exemple 4. Trouver

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

Solution. Posons

$$1 + x = y^6,$$

il vient:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

199. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

200. $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

201. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

202. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Un autre procédé pour déterminer la limite d'une expression irrationnelle consiste à faire passer au numérateur l'irrationnalité du dénominateur ou, inversement, du numérateur au dénominateur.

Exemple 5.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}. \quad (a>0).$$

203. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

204. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

205. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

206. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

208. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

9. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

210. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

211. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

212. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x(x+a)}-x]$.

213. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$.

214. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

215. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

Pour trouver les limites des expressions ci-dessous, on aura dans plusieurs cas recours à la formule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

et on suppose connu que $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ et $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

Exemple 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\right)=1\cdot 5=5.$$

216. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

217. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

218. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

219. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$.

220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$.

221. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

222. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

223. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

224. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

225. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

226. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

227. a) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$.

228. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$.

229. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

230. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin \frac{x}{2}}{\pi-x}$.

231. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

232. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

233. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

234. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{\sin 3x}$.

236. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

237. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

238. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

239. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

240. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

Pour trouver les limites du type

$$\lim_{x\to a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = C \tag{3}$$

il faut avoir en vue que:

1) si les limites

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \psi(x) = B$$

existent et sont finies, alors $C = A^B$;

2) si $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A \neq 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \pm\infty$, la détermination de la limite (3) se fait immédiatement;

3) si $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty$, on pose $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$ où $\alpha(x) \to 0$ pour $x \to a$ et, par conséquent,

$$C = \lim_{x\to a} \{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} [\varphi(x)-1]\psi(x)}$$

où $e = 2{,}718\ldots$ est la base des logarithmes naturels.

Exemple 7. Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

Solution. On a ici

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2 \text{ et } \lim_{x\to 0}(1+x)=1;$$

par conséquent,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

Exemple 8. Calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

Solution. On a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty.$$

Par suite,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=0.$$

Exemple 9. Calculer la limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}.$$

Solution. On a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

En faisant la transformation indiquée ci-dessus, on trouve

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2x}{1+x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Dans le cas donné, on peut trouver la limite d'une manière plus simple :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

Il est utile de se rappeler que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$$

241. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$.

242. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

244. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

247. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

251. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

252**. a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Pour résoudre les exercices ci-dessous, il est utile de savoir que si la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est positive alors

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right].$$

Exemple 10. Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (*)$$

Solution. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

La formule (*) est fréquemment utilisée pour trouver les limites suivantes:

253. $\lim\limits_{x\to\infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)]$.

254. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+10x)}{x}$.

255. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

256. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$.

257. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

258*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

259*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

260*. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ $(a>0)$.

261. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

262. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

263. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$

(voir les exemples 103 et 104).

Trouver les limites à gauche et à droite:

264. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

265. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x$,

où $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

266. a) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

b) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

267. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

268. a) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{|\sin x|}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{|\sin x|}{x}$.

269. a) $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x-1}{|x-1|}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

270. a) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x}{x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x}{x-2}$.

Construire les graphiques des fonctions:

271**. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos^{2n} x)$.

272*. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^n} \quad (x \geqslant 0)$.

273. $y = \lim\limits_{\alpha\to 0} \sqrt{x^2+\alpha^2}$.

274. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{arctg} nx)$.

275. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geqslant 0)$.

276. Transformer en fraction ordinaire la fraction périodique mixte

$$\alpha = 0{,}13555\ldots$$

en la considérant comme limite de fractions finies correspondantes.

277. Que deviennent les racines de l'équation de second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si le coefficient a tend vers 0 et les coefficients b et c sont constants, en outre $b \neq 0$?

278. Trouver la limite de l'angle intérieur d'un polygône régulier à n côtés lorsque $n \to \infty$.

279. Trouver la limite des périmètres des polygônes réguliers à n côtés inscrits et circonscrits à un cercle de rayon R lorsque $n \to \infty$.

280. Trouver la limite de la somme des longueurs des ordonnées de la courbe

$$y = e^{-x} \cos \pi x,$$

menées aux points $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ lorsque $n \to \infty$.

281. Trouver la limite de la somme des aires des carrés ayant pour bases les ordonnées de la courbe

$$y = 2^{1-x}$$

aux points $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, lorsque $n \to \infty$.

282. Trouver la limite pour $n \to \infty$ du périmètre d'une ligne brisée $M_0M_1 \ldots M_n$ inscrite dans la spirale logarithmique

$$r = e^{-\varphi},$$

si les sommets de cette ligne brisée ont pour angles polaires

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \ \ldots, \quad \varphi_n = \frac{n\pi}{2}.$$

283. Le segment $AB = a$ (fig. 7) est partagé en n segments égaux et sur chacun d'eux pris comme base on construit un triangle isocèle d'angle de base $\alpha = 45°$. Montrer que la limite du périmètre de la ligne brisée ainsi construite n'est pas égale à la longueur du segment AB, bien qu'à la limite cette ligne brisée « se confonde géométriquement avec le segment AB ».

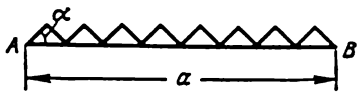


Fig. 7

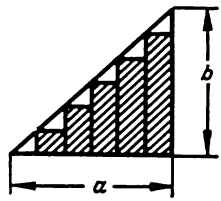


Fig. 8

284. Le point C_1 partage le segment $AB = l$ en deux parties égales, le point C_2 partage le segment AC_1 en deux parties égales, le point C_3 partage le segment C_2C_1 en deux parties égales, le point C_4 partage le segment C_2C_3 en deux parties égales, etc. Déterminer la position limite du point C_n lorsque $n \to \infty$.

285. Le côté de l'angle droit a d'un triangle rectangle est partagé en n segments égaux et sur chacun d'eux comme base on construit un rectangle inscrit dans le triangle (fig. 8). Déterminer la limite des aires de la figure en escalier ainsi construite lorsque $n \to \infty$.

286. Déterminer les constantes k et b à partir de l'équation

$$\lim_{x \to \infty} \left(kx + b - \frac{x^3+1}{x^2+1} \right) = 0. \qquad (1)$$

Donner l'interprétation géométrique de l'égalité (1).

287*. Un processus chimique donné s'accomplit de manière que l'accroissement de la quantité de la matière pour chaque intervalle de temps τ d'une suite infinie d'intervalles $(i\tau, (i+1)\tau)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ est proportionnel à la quantité de matière au début de cet intervalle et à sa durée. On suppose qu'à l'instant initial la quantité de matière

est Q_0. Déterminer la quantité de matière $Q_t^{(n)}$ au bout du temps t s'il y a accroissement de la quantité de matière pour chaque n-ème partie de l'intervalle de temps $\tau = \frac{t}{n}$.

Trouver $Q_t = \lim\limits_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$.

§ 4. Infiniment petits et infiniment grands

1°. Infiniment petits. Si

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0,$$

c'est-à-dire si $|\alpha(x)| < \varepsilon$, pour $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, on dit alors que la fonction $\alpha(x)$ est *infiniment petite* pour $x \to a$. De même, on a une définition analogue pour les infiniment petits $\alpha(x)$ lorsque $x \to \infty$.

La somme et le produit d'un nombre fini d'infiniment petits pour $x \to a$ sont aussi des infiniment petits pour $x \to a$.

Si $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont infiniment petits pour $x \to a$ avec

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C,$$

où C est un nombre différent de 0, on dit alors que les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des *infiniment petits du même ordre*; si $C = 0$, on dit alors que la fonction $\alpha(x)$ est un *infiniment petit d'ordre supérieur* par rapport à la fonction $\beta(x)$. La fonction $\alpha(x)$ est un *infiniment petit* d'ordre n par rapport à la fonction $\beta(x)$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C,$$

où $0 < |C| < +\infty$.

Si

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

on dit que les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont *équivalentes* pour $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Par exemple, pour $x \to 0$, on a

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x; \quad \ln(1 + x) \sim x, \text{ etc.}$$

La somme de deux infiniment petits d'ordres différents est équivalente à celui des infiniment petits dont l'ordre est le plus petit.

La limite du rapport de deux infiniment petits reste inchangée si on remplace les termes du rapport par des infiniment petits équivalents. En vertu de ce théorème, pour trouver la limite de la fraction

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

où $\alpha(x) \to 0$ et $\beta(x) \to 0$ pour $x \to a$, on peut négliger (ou ajouter) au numérateur et au dénominateur de la fraction des infiniment petits d'ordre supérieur choisis de manière que ces dernières expressions soient équivalentes aux expressions initiales.

Exemple 1.

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2°. Infiniment grands. Si pour un nombre arbitrairement grand N il existe un nombre $\delta(N)$ tel que pour $0 < |x - a| < \delta(N)$ l'inégalité

$$|f(x)| > N$$

soit satisfaite, on dit que $f(x)$ est un *infiniment grand* pour $x \to a$.

De même, on a une définition analogue pour les infiniment grands $f(x)$ lorsque $x \to \infty$. Comme on l'a fait pour les infiniment petits, on introduit la notion d'infiniment grand de différents ordres.

288. Démontrer que la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

est un infiniment petit pour $x \to \infty$. Pour quelles valeurs de x l'inégalité

$$|f(x)| < \varepsilon$$

est vérifiée, ε étant un nombre arbitraire?

Effectuer les calculs numériques pour: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

289. Démontrer que la fonction

$$f(x) = 1 - x^2$$

est un infiniment petit pour $x \to 1$. Pour quelles valeurs de x l'inégalité

$$|f(x)| < \varepsilon$$

est vérifiée, ε étant un nombre positif arbitraire? Effectuer les calculs numériques pour: a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 0{,}01$; c) $\varepsilon = 0{,}001$.

290. Démontrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

est un infiniment grand pour $x \to 2$. Pour quels voisinages $|x - 2| < \delta$ l'inégalité

$$|f(x)| > N$$

est satisfaite si N est un nombre positif arbitraire?

Déterminer δ, si a) $N = 10$; b) $N = 100$; c) $N = 1000$.

291. Déterminer le degré des infiniment petits suivants: a) de la surface de la sphère, b) du volume de la sphère, si le rayon r de cette sphère est un infiniment petit du premier ordre. Quels sont les degrés des infiniment petits du rayon de la sphère et du volume de la sphère par rapport à la surface de cette sphère?

292. Supposons que l'angle au centre α d'un secteur circulaire ABO (fig. 9) de rayon R tende vers 0. Déterminer le degré des infiniment petits par rapport à l'infiniment petit α: a) de la corde AB; b) de la « flèche » CD; c) de l'aire du triangle ABD.

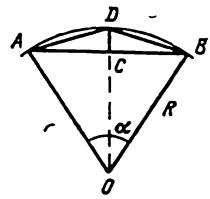


Fig. 9

293. Déterminer pour $x \to 0$ le degré des infiniment petits par rapport à x des fonctions:

a) $\dfrac{2x}{1+x}$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

c) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$;

d) $1-\cos x$;

e) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

294. Montrer que la longueur d'un arc de cercle infiniment petit de rayon constant est équivalente à la longueur de la corde qu'elle sous-tend.

295. Est-ce qu'un segment de droite infiniment petit et la demi-circonférence infiniment petite construite sur ce segment comme diamètre sont des infiniment petits équivalents?

En s'aidant du théorème relatif au rapport de deux infiniment petits, on demande de trouver les limites:

296. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2}$.

297. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

298. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$.

299. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$.

300. Montrer que pour $x \to 0$ les expressions $\dfrac{x}{2}$ et $\sqrt{1+x}-1$ sont équivalentes. En partant de ce résultat,

montrer que pour $|x|$ infiniment petit l'égalité approchée

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2} \qquad (1)$$

est vraie.

On demande, en appliquant la formule (1), de calculer approximativement :

a) $\sqrt{1{,}06}$; b) $\sqrt{0{,}97}$; c) $\sqrt{10}$; d) $\sqrt{120}$

et de comparer les valeurs trouvées avec les valeurs correspondantes données par les tables.

301. Montrer que pour $x \to 0$, en négligeant les termes d'ordre x^2, les égalités approchées suivantes sont vraies :

a) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$;

b) $\sqrt{a^2+x} \approx a+\frac{x}{2a}$ $(a>0)$;

c) $(1+x)^n \approx 1+nx$ (n entier) ;

d) $\lg(1+x) \approx Mx$,

où $M = \lg e = 0{,}43429\ldots$

En partant de ces formules, calculer approximativement :

1) $\frac{1}{1{,}02}$; 2) $\frac{1}{0{,}97}$; 3) $\frac{1}{105}$; 4) $\sqrt{15}$; 6) $1{,}04^3$;

6) $0{,}93^4$; 7) $\lg 1{,}1$.

Comparer les valeurs trouvées avec celles données par les tables.

302. Démontrer que pour $x \to \infty$ la fonction rationnelle entière

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

est un infiniment grand équivalent au terme de plus haut degré a_0x^n.

303. Supposons que $x \to \infty$. En considérant x comme un infiniment grand du premier ordre, déterminer l'ordre de croissance des fonctions :

a) $x^2-100x-1000$; c) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

b) $\frac{x^5}{x+2}$; d) $\sqrt[3]{x-2x^2}$.

§ 5. Continuité des fonctions

1°. Définition de la continuité. On dit que la fonction est *continue* pour $x=\xi$ (ou « au point ξ »), si : 1) cette fonction est définie au point ξ, c'est-à-dire que le nombre $f(\xi)$ existe, 2) la limite $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ existe et est finie ; 3) cette limite est égale à la valeur de la fonction au point ξ, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi). \tag{1}$$

Posons

$$x = \xi + \Delta\xi$$

où $\Delta\xi \to 0$, la condition (1) peut alors s'écrire comme suit

$$\lim_{\Delta\xi\to 0} \Delta f(\xi) = \lim_{\Delta\xi\to 0} [f(\xi+\Delta\xi) - f(\xi)] = 0, \tag{2}$$

c'est-à-dire la fonction est continue au point ξ si et seulement si, en ce point, à un accroissement infiniment petit de la variable indépendante correspond un accroissement infiniment petit de la fonction.

Si une fonction est continue en chaque point d'un domaine (intervalle ouvert, intervalle fermé, etc.) elle est dite *continue dans ce domaine.*

Exemple 1. Montrer que la fonction

$$y = \sin x$$

est continue pour toutes valeurs de la variable x.

Solution. On a

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x.$$

Mais puisque

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ et } \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

pour x arbitraire on a

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$$

Par conséquent, la fonction $\sin x$ est continue pour $-\infty < x < +\infty$.

2°. Points de discontinuité. On dit que la fonction $f(x)$ a (ou possède) une *discontinuité* pour la valeur $x = x_0$ (ou au point x_0) du domaine de définition de la fonction ou de la frontière de ce domaine si, en ce point, les conditions de continuité ne sont pas satisfaites.

Exemple 2. La fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (fig. 10,*a*) a une discontinuité pour $x = 1$. Cette fonction n'est pas définie au point $x = 1$ et, quel que soit le nombre $f(1)$, la fonction complétée n'est pas continue pour $x = 1$.

Si la fonction $f(x)$ possède des limites finies

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ et } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

et que les trois nombres $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ ne sont pas tous

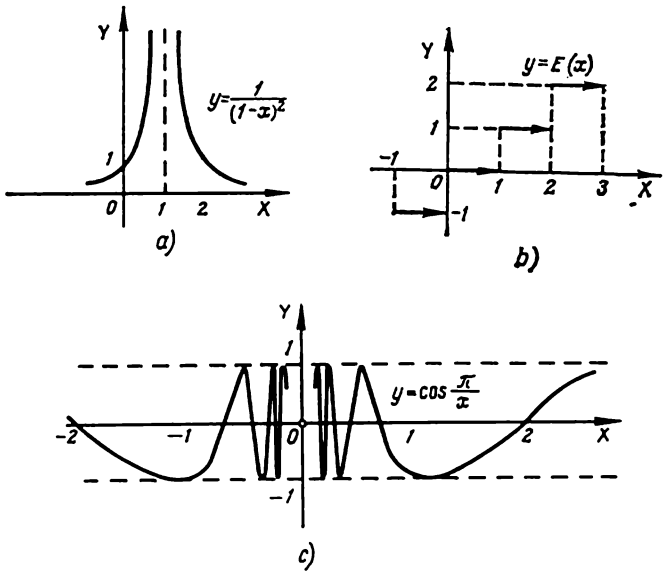


Fig. 10

égaux entre eux, on dit alors que x_0 est un *point de discontinuité de première espèce*. En particulier, si

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

on dit alors que x_0 est un *point de discontinuité apparente*.

Pour que la fonction $f(x)$ soit continue au point x_0, il faut et il suffit que

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Exemple 3. La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ possède une discontinuité de première espèce pour $x = 0$.

En effet, on a pour cette fonction

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = +1$$

et

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{-x} = -1.$$

Exemple 4. La fonction $y = E(x)$, où par $E(x)$ on note la partie entière du nombre x (c'est-à-dire que $E(x)$ est l'entier satisfaisant à l'égalité $x = E(x) + q$, où $0 \leqslant q < 1$), est discontinue (fig. 10,*b*) en chaque point d'abscisse entier: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, en outre, tous ces points sont des points de discontinuité de première espèce.

En effet: si n est un entier, alors $E(n - 0) = n - 1$ et $E(n + 0) = n$. En tous les autres points, il est évident que cette fonction est continue.

On appelle *point de discontinuité de seconde espèce* tous les points de discontinuité qui ne sont pas de première espèce.

Les *points de discontinuité infinie*, c'est-à-dire les points x_0 en lesquels au moins une des limites à gauche $f(x_0 - 0)$ ou à droite $f(x_0 + 0)$ est égale à ∞ (voir exemple 2) sont aussi des points de discontinuité de seconde espèce.

Exemple 5. La fonction $y = \cos \frac{\pi}{x}$ (fig. 10,*c*) a une discontinuité de seconde espèce au point $x = 0$ puisque les limites à gauche et à droite

$$\lim_{x \to -0} \cos \frac{\pi}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +0} \cos \frac{\pi}{x}$$

n'existent pas.

3°. Propriétés des fonctions continues. Lorsqu'on étudie la continuité des fonctions, il faut avoir en vue les théorèmes suivants:

1) la somme et le produit d'un nombre fini de fonctions continues dans un domaine sont des fonctions continues dans ce même domaine;

2) le rapport de deux fonctions continues dans un domaine est une fonction continue pour toutes les valeurs de la variable indépendante de ce domaine qui n'annulent pas le dénominateur;

3) si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle ouvert (a, b) et l'ensemble de ces valeurs contenu dans l'intervalle ouvert (A, B) et si, en outre, la fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle ouvert (A, B), la fonction composée $\varphi[f(x)]$ est continue dans l'intervalle ouvert (a, b).

Une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ jouit des propriétés suivantes:

1) $f(x)$ est bornée sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour $a \leqslant x \leqslant b$;

2) $f(x)$ possède sur $[a, b]$ une plus petite et une plus grande valeurs;

3) $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre deux de ces valeurs, c'est-à-dire si $f(\alpha) = A$ et $f(\beta) = B$ $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$ alors, quel que soit le nombre C compris

entre les nombres A et B, il existe au moins une valeur $x = \gamma(\alpha < \gamma < \beta)$ telle que $f(\gamma) = C$.

En particulier, si $f(\alpha) f(\beta) < 0$, l'équation

$$f(x) = 0$$

possède dans l'intervalle ouvert (α, β) au moins une racine réelle.

304. Montrer que la fonction $y = x^2$ est continue pour toutes les valeurs de la variable x.

305. Démontrer que la fonction rationnelle entière

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

est continue pour toutes les valeurs de x.

306. Démontrer que la fonction rationnelle

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

est continue pour toutes les valeurs de x sauf pour celles qui annulent le dénominateur.

307*. Démontrer que la fonction $y = \sqrt{x}$ est continue pour $x \geqslant 0$.

308. Démontrer que si la fonction $f(x)$ est continue et non négative dans l'intervalle ouvert (a, b), alors la fonction

$$F(x) = \sqrt{f(x)}$$

est continue dans cet intervalle ouvert.

309*. Montrer que la fonction $y = \cos x$ est continue pour tous les x.

310. Pour quelles valeurs de x les fonctions: a) $\operatorname{tg} x$ et b) $\operatorname{ctg} x$ sont continues?

311*. Montrer que la fonction $y = |x|$ est continue. Construire le graphique de cette fonction.

312. Démontrer que la valeur absolue d'une fonction continue est une fonction continue.

313. Considérons la fonction donnée par les formules

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{pour } x \neq 2, \\ A, & \text{pour } x = 2. \end{cases}$$

Choisir la valeur $A = f(2)$, de la fonction de manière que la fonction $f(x)$ ainsi complétée soit continue pour $x = 2$. Construire le graphique de la fonction $y = f(x)$.

314. Le second membre de l'égalité

$$f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}$$

n'est pas défini pour $x = 0$. Comment faut-il choisir la valeur $f(0)$ pour que la fonction $f(x)$ soit continue au point $x = 0$?

315. La fonction

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$$

n'est pas définie pour $x = 2$. Peut-on définir la valeur $f(2)$ de manière que la fonction complétée soit continue pour $x = 2$?

316. La fonction $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$. Déterminer $f(0)$ de manière que $f(x)$ soit continue pour $x = 0$, si

a) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n est un nombre entier);

b) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$;

e) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$;

f) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$.

Etudier la continuité des fonctions:

317. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

318. $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$.

319. $y = \dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}$.

320. $y = \dfrac{x}{|x|}$.

321. a) $y = \sin \dfrac{\pi}{x}$;

b) $y = x \sin \dfrac{\pi}{x}$.

322. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

323. $y = \ln(\cos x)$.

324. $y = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right|$.

325. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

326. $y = (1+x) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x^2}$.

327. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.

328. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

329. $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$.

330. $y = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \leqslant 3, \\ 2x+1 & \text{pour } x > 3. \end{cases}$ Construire le graphique de cette fonction.

331. Démontrer que la fonction de Dirichlet $\chi(x)$ égale à 0 pour x irrationnel et à 1 pour x rationnel est discontinue pour chaque valeur de x.

Etudier la continuité et construire le graphique des fonctions:

332. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geqslant 0)$.

333. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x \operatorname{arctg} nx)$.

334. a) $y = \operatorname{sgn} x$, b) $y = x \operatorname{sgn} x$, c) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$, où le symbole $\operatorname{sgn} x$ est défini par les formules:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

335. a) $y = x - E(x)$, b) $y = xE(x)$, où $E(x)$ est la partie entière du nombre x.

336. Donner un exemple qui montrerait que la somme de deux fonctions discontinues peut être une fonction continue.

337*. Soit α une fraction positive régulière tendant vers 0 $(0 < \alpha < 1)$. Peut-on dans l'égalité

$$E(1+\alpha) = E(1-\alpha) + 1,$$

vérifiée pour toutes les valeurs de α, substituer la limite de la grandeur α?

338. Montrer que l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

possède dans l'intervalle ouvert (1, 2) une racine réelle. Calculer approximativement la valeur de cette racine.

339. Démontrer que tout polynôme $P(x)$ de degré impair possède au moins une racine réelle.

340. Montrer que l'équation

$$\operatorname{tg} x = x$$

possède un ensemble infini de racines réelles.

CHAPITRE II

DÉRIVATION DES FONCTIONS

§ 1. Calcul des dérivées

1°. Accroissement de la variable indépendante et accroissement de la fonction. Si x et x_1 sont deux valeurs de la variable x et $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$ sont les valeurs correspondantes de la fonction $y = f(x)$, alors

$$\Delta x = x_1 - x$$

est appelé *accroissement de la variable* x sur l'intervalle ouvert (x, x_1), et

$$\Delta y = y_1 - y$$

ou

$$\Delta y = f(x_1 - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1)$$

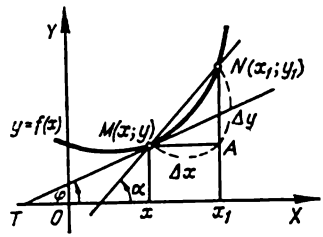


Fig. 11

accroissement de la fonction y sur ce même intervalle ouvert (x, x_1) (fig. 11, où $\Delta x = MA$ et $\Delta y = AN$). Le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

donne le coefficient angulaire de la sécante MN du graphique de la fonction $y = f(x)$ (fig. 11) et s'appelle la *vitesse moyenne* de variation de la fonction y sur l'intervalle ouvert $(x, x + \Delta x)$.

Exemple 1. Etant donnée la fonction

$$y = x^2 - 5x + 6,$$

on demande de calculer Δx et Δy correspondant aux variations suivantes de la variable:

a) de $x = 1$ à $x = 1{,}1$;
b) de $x = 3$ à $x = 2$.

Solution. On a

a) $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$,

$\Delta y = (1{,}1^2 - 5 \cdot 1{,}1 + 6) - (1^2 - 5 \cdot 1 + 6) = -0{,}29$;

b) $\Delta x = 2 - 3 = -1$,

$\Delta y = (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) - (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 0$.

Exemple 2. Déterminer le coefficient angulaire de la sécante à l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$ qui passe par les points $M\left(3, \frac{1}{3}\right)$ et $N\left(10, \frac{1}{10}\right)$.

Solution. On a $\Delta x=10-3=7$ et $\Delta y=\frac{1}{10}-\frac{1}{3}=-\frac{7}{30}$. Par conséquent, $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{30}$.

2°. Dérivée. La *dérivée* $y'=\frac{dy}{dx}$ de la fonction $y=f(x)$ par rapport à la variable x, est, par définition, la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers 0, c'est-à-dire

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

La grandeur algébrique de la dérivée donne le *coefficient angulaire* de la tangente (géométrique) MT au point x du graphique de la fonction $y=f(x)$ (fig. 11):

$$y'=\operatorname{tg}\varphi.$$

L'opération qui constitue à calculer la dérivée y' est appelée *dérivation*. La dérivée $y'=f'(x)$ n'est autre que la *vitesse de variation de la fonction* au point x.

Exemple 3. Trouver la dérivée de la fonction

$$y=x^2.$$

Solution. D'après la formule (1) on trouve

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Par conséquent,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

3°. Dérivée à gauche et dérivée à droite. Les expressions

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

et

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

s'apellent respectivement *dérivée à gauche* et *dérivée à droite* de la fonction $f(x)$ au point x. Pour que $f'(x)$ existe, il faut et il suffit que

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

Exemple 4. Calculer $f'_-(0)$ et $f'_+(0)$ pour la fonction

$$f(x) = |x|.$$

Solution. On a par définition

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = +1.$$

4°. Dérivée infinie. Si en un point on a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

on dit alors que la fonction continue $f(x)$ a une dérivée infinie au point x. Dans ce cas, la tangente (géométrique) au graphique de la fonction $y = f(x)$ est perpendiculaire à l'axe OX.

Exemple 5. Calculer $f'(0)$ pour la fonction

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Solution. On a

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

341. Trouver l'accroissement de la fonction $y = x^2$ correspondant aux variations de la variable:

a) de $x = 1$ à $x_1 = 2$;
b) de $x = 1$ à $x_1 = 1{,}1$;
c) de $x = 1$ à $x_1 = 1 + h$.

342. Calculer Δy pour la fonction $y = \sqrt[3]{x}$, si:

a) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}001$;
b) $x = 8$, $\Delta x = -9$;
c) $x = a$, $\Delta x = h$.

343. Pourquoi peut-on déterminer l'accroissement Δy de la fonction $y = 2x + 3$ connaissant seulement l'accroissement correspondant de la variable $\Delta x = 5$, et pourquoi ne le peut-on pas pour la fonction $y = x^2$?

344. Calculer l'accroissement Δy et le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour les fonctions:

a) $y = \frac{1}{(x^2-2)^2}$ pour $x = 1$ et $\Delta x = 0{,}4$;

b) $y = \sqrt{x}$ pour $x = 0$ et $\Delta x = 0{,}0001$;
c) $y = \lg x$ pour $x = 100\,000$ et $\Delta x = -90\,000$.

345. Déterminer Δy et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondant aux variations de la variable de x à $x + \Delta x$ pour les fonctions:

a) $y = ax + b$; d) $y = \sqrt{x}$;
b) $y = x^3$; e) $y = 2^x$;
c) $y = \frac{1}{x^2}$; f) $y = \ln x$.

346. Déterminer le coefficient angulaire de la sécante à la parabole

$$y = 2x - x^2$$

si les abscisses des points d'intersection sont:

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$;
b) $x_1 = 1,\ x_2 = 0{,}9$;
c) $x_1 = 1,\ x_2 = 1 + h$.

Vers quelle limite tend le coefficient angulaire de la sécante dans le dernier cas lorsque $h \to 0$?

347. Quelle est la vitesse moyenne de variation de la fonction $y = x^3$ dans l'intervalle fermé $1 \leqslant x \leqslant 4$?

348. La loi de mouvement d'un point est $s = 2t^2 + 3t + 5$, où la distance s est évaluée en centimètres et le temps t en secondes. Quelle est la vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps compris entre les instants $t = 1$ et $t = 5$?

349. Calculer la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la courbe $y = 2^x$ sur l'intervalle fermé $1 \leqslant x \leqslant 5$.

350. Calculer la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la courbe $y = f(x)$ sur l'intervalle fermé $[x,\ x + \Delta x]$.

351. A quoi est égal le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la courbe $y = f(x)$ au point donné x?

352. Donner les définitions: a) de vitesse moyenne de rotation; b) de vitesse instantanée de rotation.

353. Un corps chauffé se refroidit lorsqu'on le place dans un milieu dont la température est inférieure à la température du corps chauffé. Que faut-il comprendre par: a) vitesse moyenne de refroidissement; b) vitesse moyenne de refroidissement à un instant donné?

354. Que faut-il comprendre par vitesse de réaction d'une substance à l'état de réaction chimique?

355. Soit $m = f(x)$ la masse d'une tige non homogène répartie sur l'intervalle fermé $[0, x]$. Que faut-il comprendre par: a) densité linéaire moyenne de la tige pour l'intervalle fermé $[x, x + \Delta x]$; b) densité linéaire de la tige au point x?

356. Déterminer le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la fonction $y = \frac{1}{x}$ au point $x = 2$ si: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0{,}1$; c) $\Delta x = 0{,}01$. Calculer la dérivée y' pour $x = 2$.

357**. Calculer la dérivée de la fonction $y = \operatorname{tg} x$.

358. Trouver $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour les fonctions:

a) $y = x^3$; b) $y = \frac{1}{x^2}$;

c) $y = \sqrt{x}$; d) $y = \operatorname{ctg} x$.

359. Calculer $f'(8)$, si $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

360. Calculer $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, si $f(x) = x(x-1)^2 \times \times (x-2)^3$.

361. Déterminer les points en lesquels la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ coïncide numériquement avec la fonction, c'est-à-dire $f(x) = f'(x)$.

362. La loi du mouvement d'un point est $s = 5t^2$ où la distance s est évaluée en mètres et le temps t en secondes. Déterminer la vitesse du mouvement à l'instant $t = 3$.

363. Déterminer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $y = 0{,}1x^3$ passant par le point d'abscisse $x = 2$.

364. Déterminer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $y = \sin x$ au point $(\pi, 0)$.

365. Déterminer la valeur de la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ au point $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$.

366*. Quelles sont les valeurs des coefficients angulaires des tangentes aux courbes $y = \frac{1}{x}$ et $y = x^2$ aux points d'intersection? Trouver l'angle formé par les tangentes.

367**. Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de dérivées finies aux points indiqués:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$ au point $x = 0$;

b) $y = \sqrt[5]{x-1}$ au point $x = 1$;

c) $y = |\cos x|$ aux points $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 2. Tableau des principales formules de dérivation et leurs applications

1°. Principales règles de calcul des dérivées. Si c est une constante et $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ sont des fonctions qui possèdent des dérivées, alors

1) $(c)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uv)' = u'v + v'u$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

7) $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

2°. Tableau des dérivées des principales fonctions.

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. $(\sin x)' = \cos x$.

IV. $(\cos x)' = -\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

VI. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

VII. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

VIII. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

X. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)' = a^x \ln a$.

XII. $(e^x)' = e^x$.

XIII. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

XIV. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$ $(x > 0,\ a > 0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$.

XXI $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\qquad (|x|<1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = \dfrac{-1}{x^2-1}$ $\qquad (|x|>1)$.

3°. Règle de dérivation des fonctions composées. Si $y = f(u)$ et $u = \varphi(x)$, c'est-à-dire $y = f[\varphi(x)]$, où les fonctions y et u possèdent des dérivées, alors

$$y'_x = y'_u u'_x \tag{1}$$

ou, à l'aide d'autres notations,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Cette règle est valable pour un nombre fini de variables intermédiaires possédant chacune une dérivée.

Exemple 1. Calculer la dérivée de la fonction

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5.$$

Solution. Posons $y = u^5$, où $u = (x^2 - 2x + 3)$. On a, en vertu de la formule (1),

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4 (2x - 2) = 10(x-1)(x^2 - 2x + 3)^4.$$

Exemple 2. Calculer la dérivée de la fonction

$$y = \sin^3 4x.$$

Solution. Posons

$$y = u^3; \quad u = \sin v; \quad v = 4x.$$

On trouve

$$y' = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 12 \sin^2 4x \cos 4x.$$

Calculer la dérivée des fonctions données dans les exercices ci-dessous.

(Dans les exercices nos 368 à 408 il n'y aura pas lieu d'employer la règle de dérivation des fonctions composées.)

A. Fonctions algébriques

368. $y = x^5 - 4x^2 + 2x - 3.$

369. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4.$

370. $y = ax^2 + bx + c.$

371. $y = \dfrac{-5x^3}{a}.$

372. $y = at^m + bt^{m+n}.$

373. $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

374. $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2.$

375. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}.$

376*. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$.

377. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$.

378. $y = \frac{a+bx}{c+dx}$.

379. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$.

380. $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

381. $y = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$.

B. Fonctions trigonométriques et fonctions trigonométriques inverses

382. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$.

383. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

384. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

385. $y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$.

386. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

387. $y = x \operatorname{ctg} x$.

388. $y = x \arcsin x$.

389. $y = \frac{(1+x^2) \operatorname{arctg} x - x}{2}$.

C. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmiques

390. $y = x^7 \cdot e^x$.

391. $y = (x-1) e^x$.

392. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

393. $y = \frac{x^5}{e^x}$.

394. $f(x) = e^x \cos x$.

395. $y = (x^2 - 2x + 2) e^x$.

396. $y = e^x \arcsin x$.

397. $y = \frac{x^3}{\ln x}$.

398. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$.

399. $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$.

400. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

D. Fonctions hyperboliques et fonctions hyperboliques inverses

401. $y = x \operatorname{sh} x$.

402. $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$.

403. $y = \operatorname{th} x - x$.

404. $y = \frac{3 \operatorname{cth}^2 x}{\ln x}$.

405. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{Arth} x$.

406. $y = \arcsin x \operatorname{Arsh} x$.

407. $y = \frac{\operatorname{Arch} x}{x}$.

408. $y = \frac{\operatorname{Arcth} x}{1-x^2}$.

Employer la règle de dérivation des fonctions composées à une variable intermédiaire dans les exercices nos 409-466.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

409.** $y=(1+3x-5x^2)^{30}$.

Solution. Posons $1+3x-5x^2=u$, alors $y=u^{30}$. On a: $y'_u=30u^{29}$; $u'_x=3-10x$;
$y'_x=30u^{29}\cdot(3-10x)=30(1+3x-5x^2)^{29}\cdot(3-10x)$.

410. $y=\left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$.

411. $f(y)=(2a+3by)^2$.

412. $y=(3+2x^2)^4$.

413. $y=\frac{3}{56(2x-1)^7}-\frac{1}{24(2x-1)^6}-\frac{1}{40(2x-1)^5}$.

414. $y=\sqrt{1-x^2}$.

415. $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$.

416. $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$.

417. $y=(3-2\sin x)^5$.

Solution. $y'=5(3-2\sin x)^4\cdot(3-2\sin x)'=$
$=5(3-2\sin x)^4\cdot(-2\cos x)=-10\cos x(3-2\sin x)^4$.

418. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$.

419. $y=\sqrt{\operatorname{ctg}x}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$.

420. $y=2x+5\cos^3x$.

421*. $x=\operatorname{cosec}^2t+\sec^2t$.

422. $f(x)=-\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$.

423. $y=\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}$.

424. $y=\sqrt{\frac{3\sin x-2\cos x}{5}}$.

425. $y=\sqrt[3]{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^3x}$.

426. $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

427. $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}-(\arcsin x)^3$.

428. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg}x}$.

429. $y=\sqrt{xe^x+x}$.

430. $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+\ln^5x$.

431. $y=\sin 3x+\cos\frac{x}{5}+\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Solution. $y'=\cos 3x\cdot(3x)'-\sin\frac{x}{5}\left(\frac{x}{5}\right)'+\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=$
$=3\cos 3x-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

432. $y=\sin(x^2-5x+1)+\operatorname{tg}\frac{a}{x}$.

433. $f(x)=\cos(\alpha x+\beta)$.

434. $f(t)=\sin t\sin(t+\varphi)$.

435. $y=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

436. $f(x)=a\operatorname{ctg}\dfrac{x}{a}$.

437. $y=-\dfrac{1}{20}\cos(5x^2)-\dfrac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y=\arcsin 2x$.

Solution. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

439. $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

440. $f(x)=\arccos\sqrt{x}$.

441. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

442. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

443. $y=5e^{-x^2}$.

444. $y=\dfrac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y=x^2 10^{2x}$.

446. $f(t)=t\sin 2^t$.

447. $y=\arccos e^x$.

448. $y=\ln(2x+7)$.

449. $y=\lg\sin x$.

450. $y=\ln(1-x^2)$.

451. $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

452. $y=\ln(e^x+5\sin x-4\arcsin x)$.

453. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$.

454. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$.

F. Diverses fonctions

455.** $y=\sin^3 5x\cos^2\dfrac{x}{3}$.

456. $y=-\dfrac{11}{2(x-2)^2}-\dfrac{4}{x-2}$.

457. $y=-\dfrac{15}{4(x-3)^4}-\dfrac{10}{3(x-3)^3}-\dfrac{1}{2(x-3)^2}$.

458. $y=\dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

459. $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$.

460. $y=\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

461. $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

462. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

463. $y=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

464. $y=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$.

465. $y=x^4(a-2x^3)^2$.

466. $y=\left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$.

467. $y=\frac{9}{5(x+2)^5}-\frac{3}{(x+2)^4}+\frac{2}{(x+2)^3}-\frac{1}{2(x+2)^2}$

468. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$.

469. $y=\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

470. $z=\sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$.

471. $f(t)=(2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$.

472. $x=\frac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$.

473. $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

474. $y=\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)$.

475. $y=\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}$.

476. $y=\operatorname{tg}^5 5x$.

477. $y=\frac{1}{2}\sin(x^2)$.

478. $y=\sin^2(t^3)$.

479. $y=3\sin x\cos^2 x+\sin^3 x$.

480. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

481. $y=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\operatorname{ctg} x$.

482. $y=\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}$.

483. $y=\arcsin x^2+\arccos x^2$.

484. $y=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\arccos x$.

485. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$.

486. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

487. $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

488. $y=\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

489. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$.

490. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{2}$.

491. $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$.

492. $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$.

493. $y=\ln(\arcsin 5x)$.

494. $y=\arcsin(\ln x)$.

495. $y=\operatorname{arctg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

496. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$.

497. $y=3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

498. $y=-\sqrt{2}\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}-x$.

499. $y=\sqrt{e^{ax}}$.

500. $y=e^{\sin^2 x}$.

501. $F(x)=(2ma^{mx}+b)^p$.

502. $F(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$.

503. $y=\frac{(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}$.

504. $y=\frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x-\cos 3x)$.

505. $y=x^n a^{-x_2}$.

506. $y=\sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$.

507. $y=3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.

508. $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

509. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

510. $y=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$.

511. $y=\ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$.

512. $y=\frac{1}{\ln^2 x}$.

513. $y=\ln\cos\frac{x-1}{x}$.

514*. $y=\ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

515. $y=\ln\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

516. $y=-\frac{1}{2\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}x$.

517. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

518. $y=\ln\ln(3-2x^3)$.

519. $y=5\ln^3(ax+b)$.

520. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$.

521. $y=\frac{m}{2}\ln(x^2-a^2)+\frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$.

522. $y = x \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$.

523. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

524. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

525. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$.

526. $y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$.

527. $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3} \frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

528. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$.

529. $y = \operatorname{arctg} \ln x$.

530. $y = \ln \arcsin x + \frac{1}{2} \ln^2 x + \arcsin \ln x$.

531. $y = \operatorname{arctg} \ln \frac{1}{x}$.

532. $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$.

533. $y = \ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$.

534. $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

535. $f(x) = \frac{1}{2} \ln (1+x) - \frac{1}{6} \ln (x^2 - x + 1) +$
$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

536. $f(x) = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$.

537. $y = \operatorname{sh}^3 2x$.

538. $y = e^{\alpha x} \operatorname{ch} \beta x$.

539. $y = \operatorname{th}^3 2x$.

540. $y = \ln \operatorname{sh} 2x$.

541. $y = \operatorname{Arsh} \frac{x^2}{a^2}$.

542. $y = \operatorname{Arch} \ln x$.

543. $y = \operatorname{Arth} (\operatorname{tg} x)$.

544. $y = \operatorname{Arcth} (\sec x)$.

545. $y = \operatorname{Arth} \frac{2x}{1+x^2}$.

546. $y = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2} x$.

547. $y=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)\operatorname{Arsh}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}$.

548. Calculer y' si

a) $y=|x|$;

b) $y=x|x|$.

Construire les graphiques des fonctions y et y'.

549. Calculer y' si

$$y=\ln|x| \qquad (x\neq 0).$$

550. Calculer $f'(x)$ si

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{pour } x\leqslant 0, \\ e^{-x}, & \text{pour } x>0. \end{cases}$$

551. Calculer $f'(0)$ si

$$f(x)=e^{-x}\cos 3x.$$

Solution. $f'(x)=e^{-x}(-3\sin 3x)-e^{-x}\cos 3x$;

$$f'(0)=e^0(-3\sin 0)-e^0\cos 0=-1.$$

552. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{x}{2}$. Calculer $f'(1)$.

553. $y=\operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$. Calculer $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

554. Calculer $f'_+(0)$ et $f'_-(0)$ pour les fonctions

a) $f(x)=\sqrt{\sin(x^2)}$;

b) $f(x)=\arcsin\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$;

c) $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

d) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

e) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$.

555. Etant donnée la fonction $f(x)=e^{-x}$, calculer l'expression

$$f(0)+xf'(0).$$

556. Etant donnée la fonction $f(x)=\sqrt{1+x}$, calculer l'expression $f(3)+(x-3)f'(3)$.

557. Etant données les fonctions $f(x)=\operatorname{tg}x$ et $\varphi(x)=\ln(1-x)$, calculer l'expression $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. Calculer $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$, si $f(x) = 1 - x$ et $\varphi(x) = 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$.

559. Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

560. Démontrer que la dérivée d'une fonction périodique est une fonction périodique.

561. Montrer que la fonction $y = xe^{-x}$ satisfait à l'équation

$$xy' = (1 - x)\,y.$$

562. Montrer que la fonction $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ vérifie l'équation

$$xy' = (1 - x^2)\,y.$$

563. Montrer que la fonction $y = \frac{1}{1 + x + \ln x}$ vérifie l'équation $xy' = y(y \ln x - 1)$.

G. Dérivées logarithmiques

La *dérivée logarithmique* d'une fonction $y = f(x)$ est, par définition, la dérivée du logarithme de cette fonction, c'est-à-dire

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

L'emploi de la dérivée logarithmique simplifie dans certains cas le calcul des dérivées.

E x e m p l e . Calculer la dérivée de la fonction puissance composée

$$y = u^v,$$

où $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$.

S o l u t i o n. En prenant le logarithme de deux membres, on a

$$\ln y = v \ln u.$$

Dérivons par rapport à x les deux membres de cette dernière égalité. On a

$$(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)',$$

ou

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u},$$

d'où

$$y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right),$$

ou

$$y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

564. Calculer y' si

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x.$$

Solution. $\ln y = \frac{2}{3}\ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln\sin x + 2\ln\cos x$,

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x} + \frac{(-1)}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\,\frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{2\sin x}{\cos x},$$

d'où

$$y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} x\right).$$

565. Calculer y' si $y = (\sin x)^x$.

Solution. $\ln y = x\ln\sin x$; $\frac{1}{y}\,y' = \ln\sin x + x\operatorname{ctg} x$;

$$y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x).$$

Dans les exercices ci-dessous, on demande de calculer y' en ayant pris préalablement le logarithme de la fonction $y = f(x)$:

566. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

568. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

571. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

572. $y = x^x$.

573. $y = x^{x^2}$.

574. $y = \sqrt[x]{x}$.

575. $y = x^{\sqrt{x}}$.

576. $y = x^{x^x}$.

577. $y = x^{\sin x}$.

578. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

579. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

580. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.

§ 3. Dérivées des fonctions qui ne sont pas données explicitement

1°. Dérivée d'une fonction inverse. Si la fonction $y = f(x)$ a une dérivée $y'_x \neq 0$, alors la dérivée de la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est donnée par la formule

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

ou

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Exemple 1. Calculer la dérivée x'_y de

$$y=x+\ln x.$$

Solution. On a $y'_x=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$; par conséquent,

$$x'_y=\frac{x}{x+1}.$$

2°. Dérivées des fonctions données sous forme paramétrique. Si la dépendance entre la fonction y et sa variable x est donnée par l'intermédiaire d'un paramètre t

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

alors

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

ou, à l'aide d'autres notations,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Exemple 2. Calculer $\frac{dy}{dx}$, si

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t, \\ y&=a\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Solution. On trouve $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$ et $\frac{dy}{dt}=a\cos t$. D'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

3°. Dérivée d'une fonction implicite. Si la dépendance entre x et y est donnée par une expression implicite

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

alors pour calculer la dérivée $y'_x=y'$ il suffit dans les cas simples:

1) de calculer la dérivée par rapport à x du premier membre de l'équation (1) en considérant y comme fonction de x;

2) d'égaler à 0 cette dérivée, c'est-à-dire poser

$$\frac{d}{dx}F(x, y)=0, \tag{2}$$

3) de résoudre par rapport à y' l'équation ainsi trouvée.

Exemple 3. Calculer la dérivée y_x' si

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \qquad (3)$$

Solution. Calculons la dérivée du premier membre de (3) et égalons-la à 0. On trouve:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0,$$

d'où

$$y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

581. Calculer la dérivée x_y', si

a) $y = 3x + x^3$;

b) $y = x - \frac{1}{2}\sin x$;

c) $y = 0{,}1x + e^{\frac{x}{2}}$.

Dans les exercices ci-dessous, où les fonctions y sont données sous forme paramétrique, on demande de déterminer la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$:

582. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

583. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

584. $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2}, \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

585. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

586. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

587. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

588. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

589. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

590. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

591. $\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

592. $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

593. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

594. $\begin{cases} x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t - \sin t\right), \\ y = a(\sin t + \cos t). \end{cases}$

595. Calculer $\frac{dy}{dx}$ pour $t = \frac{\pi}{2}$, si

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solution. $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

596. Calculer $\frac{dy}{dx}$ pour $t = 1$, si

$$\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$$

597. Calculer $\frac{dy}{dx}$ pour $t = \frac{\pi}{4}$, si

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$$

598. Montrer que la fonction y donnée sous forme paramétrique par les équations

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$$

satisfait à l'équation

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

599. Pour $x = 2$ on a

$$x^2 = 2x.$$

Découle-t-il de cette égalité que

$$(x^2)' = (2x)'$$

pour $x = 2$?

600. Soit $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Peut-on dériver terme à terme l'égalité

$$x^2 + y^2 = a^2 ?$$

On demande, dans les exercices ci-dessous, de calculer la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ des fonctions implicites y.

601. $2x - 5y + 10 = 0$.

602. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

603. $x^3 + y^3 = a^3$.

604. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$.

605. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

606. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

607. $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.

608. $y - 0{,}3 \sin y = x$.

609. $a \cos^2 (x + y) = b$.

610. $\operatorname{tg} y = xy$.

611. $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

612. $\operatorname{arctg} (x + y) = x$.

613. $e^y = x + y$.

614. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

615. $\ln y + \frac{x}{y} = c$.

616. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$.

617. $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

618. $x^y = y^x$.

619. Calculer y' au point M (1, 1) si

$$2y = 1 + xy^3.$$

Solution. On a, en dérivant, $2y' = y^3 + 3xy^2y'$. En faisant $x = 1$ et $y = 1$ on trouve $2y' = 1 + 3y'$, d'où $y' = -1$.

620. Calculer la dérivée y' des fonctions y aux points indiqués:

a) $(x + y)^2 = 27 (x - y)$ pour $x = 2$ et $y = 1$;
b) $ye^y = e^{x+1}$ pour $x = 0$ et $y = 1$;
c) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ pour $x = 1$ et $y = 1$.

§ 4. Applications géométriques et mécaniques de la dérivée

1°. Equations de la tangente et de la normale. Partant de l'interprétation géométrique de la dérivée, il découle que *l'équation de la tangente* à une courbe $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$ au point $M(x_0, y_0)$ est

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0),$$

où y'_0 est la valeur de la dérivée y' au point $M(x_0, y_0)$. La droite qui passe par le point de tangence et qui est perpendiculaire à la tangente

porte le nom de *normale à la courbe*. La normale est donnée par l'équation

$$x - x_0 + y_0' (y - y_0) = 0.$$

2°. Angle de deux courbes. Par définition, on appelle angle de deux courbes

$$y = f_1 (x)$$

et

$$y = f_2 (x)$$

au point commun $M_0 (x_0, y_0)$ (fig. 12) l'angle ω formé par les tangentes M_0A et M_0B aux courbes au point M_0.

D'après une formule bien connue de la géométrie analytique, on trouve que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2' (x_0) - f_1' (x_0)}{1 + f_1' (x_0) f_2' (x_0)}.$$

3°. Segments de droite déterminés par la tangente et la normale en coordonnées car-

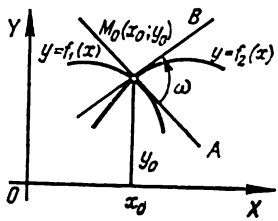


Fig. 12

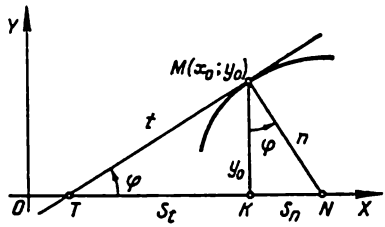


Fig. 13

tésiennes. La tangente et la normale déterminent les quatre segments suivants (fig. 13):

$t = TM$ est la *tangente*;

$S_t = TK$ est la *sous-tangente*;

$n = NM$ est la *normale*;

$S_n = KN$ est la *sous-normale*.

Puisque $KM = | y_0 |$ et $\operatorname{tg} \varphi = y_0'$, on a

$$t = TM = \left| \frac{y_0}{y_0'} \sqrt{1 + (y_0')^2} \right|; \qquad n = NM = \left| y_0 \sqrt{1 + (y_0')^2} \right|;$$

$$S_t = TK = \left| \frac{y_0}{y_0'} \right|; \quad S_n = | y_0 y_0' |.$$

4°. Segments de droite déterminés par la tangente et la normale en coordonnées polai-

r e s. Si la courbe est donnée par une équation en coordonnées polaires $r = f(\varphi)$, alors l'angle μ formé par la tangente MT et le rayon vecteur $r = OM$ (fig. 14) est donné par la formule suivante:

$$\operatorname{tg}\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

La tangente MT et la normale MN au point M ainsi que le rayon vecteur du point de tangence et la perpendiculaire au rayon vecteur

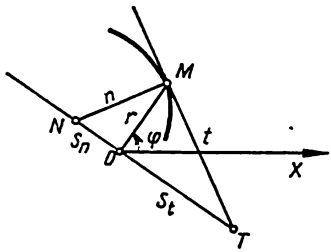


Fig. 14

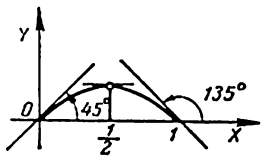


Fig. 15

menée par le pôle O déterminent les quatre segments suivants (voir fig. 14):

$t = MT$ est la *tangente polaire*;

$n = MN$ est la *normale polaire*;

$S_t = OT$ est la *sous-tangente polaire*;

$S_n = ON$ est la *sous-normale polaire*.

Les grandeurs algébriques de ces segments sont données par les formules suivantes:

$$t = MT = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2+(r')^2}; \qquad S_t = OT = \frac{r^2}{|r'|};$$

$$n = MN = \sqrt{r^2+(r')^2}; \qquad S_n = ON = |r'|.$$

621. Trouver l'angle φ formé par l'axe OX avec la tangente à la courbe $y = x - x^2$ aux points d'abscisse: a) $x = 0$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = 1$.

S o l u t i o n. On a $y' = 1 - 2x$. D'où a) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$; b) $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0°$; c) $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 135°$ (fig. 15).

622. Déterminer les angles formés par les sinusoïdes $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ et l'axe des abscisses à l'origine des coordonnées.

623. Déterminer l'angle formé à l'origine des coordonnées par la tangentoïde $y = \operatorname{tg} x$ et l'axe des abscisses.

624. Sous quel angle la courbe $y = e^{0,5x}$ coupe la droite $x = 2$?

625. Déterminer les points où les tangentes à la courbe $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

626. Déterminer le point de la parabole

$$y = x^2 - 7x + 3$$

où la tangente est parallèle à la droite $5x + y - 3 = 0$.

627. Déterminer l'équation de la parabole $y = x^2 + bx + c$ tangente à la droite $x = y$ au point (1, 1).

628. Déterminer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ au point (1, 2).

629. Déterminer le point de la courbe $y^2 = 2x^3$ où la tangente est perpendiculaire à la droite $4x - 3y + 2 = 0$.

630. Former les équations de la tangente et de la normale à la parabole

$$y = \sqrt{x}$$

au point d'abscisse $x = 4$.

Solution. On a $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, d'où le coefficient angulaire de la tangente est $k = [y']_{x=4} = \frac{1}{4}$. Puisque le point de tangence a pour coordonnées $x = 4$, $y = 2$, l'équation de la tangente est donc $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ ou $x - 4y + 4 = 0$.

Or, d'après la condition de perpendicularité, le coefficient angulaire de la normale est

$$k_1 = -4,$$

d'où l'équation de la normale $y - 2 = -4(x - 4)$ ou $4x + y - 18 = 0$.

631. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ au point (—2, 5).

632. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

au point (1, 0).

633. Former les équations de la tangente et de la normale aux courbes aux points indiqués:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$ à l'origine des coordonnées;

b) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ au point d'intersection avec l'axe OX;

c) $y = \arccos 3x$ au point d'intersection avec l'axe OY;

d) $y = \ln x$ au point d'intersection avec l'axe OX;

e) $y = e^{1-x^2}$ aux points d'intersection avec la droite $y = 1$.

634. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe

$$x = \frac{1+t}{t^3},$$

$$y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t},$$

au point (2, 2).

635. Former l'équation de la tangente à la courbe

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t$$

à l'origine des coordonnées et au point $t = \frac{\pi}{4}$.

636. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ au point d'ordonnée $y = 3$.

637. Former l'équation de la tangente à la courbe $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ au point (1, 1).

638. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

639. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe

$$y^4 = 4x^4 + 6xy \quad \text{au point } (1, 2).$$

640*. Montrer que la tangente à l'hyperbole $xy = a^2$ limitée par les axes de coordonnées est partagée en deux segments égaux par le point de tangence.

641. Montrer que pour l'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ la tangente limitée par les axes de coordonnées a une grandeur constante égale à a.

642. Montrer que les normales à la développante de cercle

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

sont tangentes au cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

643. Déterminer l'angle d'intersection des paraboles $y = (x - 2)^2$ et $y = -4 + 6x - x^2$.

644. Sous quel angle les paraboles $y = x^2$ et $y = x^3$ se coupent-elles?

645. Montrer que les courbes $y = 4x^2 + 2x - 8$ et $y = x^3 - x + 10$ sont tangentes au point (3; 34). Sont-elles tangentes au point (—2; 4)?

646. Montrer que les hyperboles

$$xy = a^2, \quad x^2 - y^2 = b^2$$

se coupent sous un angle droit.

647. Etant donnée la parabole $y^2 = 4x$, calculer la longueur de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale au point (1; 2).

648. Déterminer la longueur de la sous-tangente à la courbe $y = 2^x$ en un point quelconque.

649. Montrer que pour l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$ la longueur de la normale au point courant est égale au rayon vecteur de ce point.

650. Montrer que la longueur de la sous-normale à l'hyperbole $x^2 - y^2 = a^2$ au point courant est égale à l'abscisse de ce point.

651. Montrer que les sous-tantentes à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et au cercle $x^2 + y^2 = a^2$ aux points de mêmes abscisses sont égales. En déduire un procédé de construction des tangentes à l'ellipse.

652. Déterminer les longueurs de la tangente, de la normale, de la sous-tangente et de la sous-normale à la cycloïde

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t), \end{cases}$$

en un point courant $t = t_0$.

653. Déterminer l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur à la spirale logarithmique

$$r = ae^{k\varphi}.$$

654. Déterminer l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur à la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ au point de tangence.

655. Déterminer les longueurs de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale polaires ainsi

que l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur à la spirale d'Archimède

$$r = a\varphi$$

au point de tangence d'angle polaire $\varphi = 2\pi$.

656. Déterminer la longueur de la sous-tangente, de la sous-normale, de la tangente et de la normale polaires ainsi que l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur à la spirale hyperbolique $r = \frac{a}{\varphi}$ au point courant $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

657. La loi du mouvement d'un point de l'axe OX est

$$x = 3t - t^3.$$

Déterminer la vitesse du mouvement de ce point aux instants $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (x est donné en centimètres et t en secondes).

658. Deux points se déplacent sur l'axe OX suivant les lois

$$x = 100 + 5t$$

et

$$x = \frac{1}{2}t^2$$

où $t \geqslant 0$. Avec quelle vitesse ces points s'éloignent l'un de l'autre à l'instant de leur rencontre (x est donné en centimètres et t en secondes)?

659. Les extrémités du segment $AB = 5$ m glissent sur les axes de coordonnées OX et OY (fig. 16). La vitesse de déplacement de l'extrémité A est égale à 2 m/s. Quelle est la vitesse de déplacement de l'extrémité B quand l'extrémité A se trouve à la distance $OA = 3$ m de l'origine des coordonnées?

660*. La loi du mouvement d'un point matériel lancé vers le haut dans le plan vertical OXY (fig. 17) sous un angle α avec l'horizontal et avec la vitesse initiale v_0 est donnée par les formules (on néglige la résistance de l'air)

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

où t est le temps, g l'accélération de la pesanteur. Déterminer la trajectoire du mouvement et la portée du vol. Déterminer également la grandeur de la vitesse du mouvement et sa direction.

661. Un point se déplace sur l'hyperbole $y = \frac{10}{x}$ de manière que son abscisse x croît uniformément à raison d'une unité par seconde. On demande avec quelle vitesse varie son ordonnée lorsque le point coïncide avec le point (5; 2)?

662. Quel est le point de la parabole $y^2 = 18x$ dont l'ordonnée croît deux fois plus vite que son abscisse?

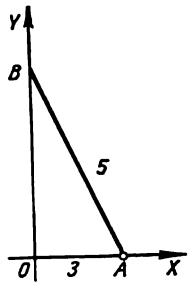


Fig. 16

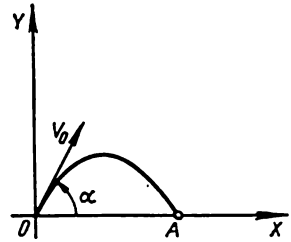


Fig. 17

663. Un des côtés d'un rectangle a une longueur constante $a = 10$ cm et l'autre côté b croît avec une vitesse constante de 4 cm/s. Avec quelle vitesse la diagonale et l'aire du rectangle croissent à l'instant où $b = 30$ cm?

664. Le rayon d'une sphère augmente uniformément avec la vitesse de 5 cm/s. On demande avec quelles vitesses croissent la surface et le volume de la sphère à l'instant où son rayon est égal à 50 cm?

665. Un point se déplace sur la spirale d'Archimède

$$r = a\varphi$$

($a = 10$ cm) de manière que la vitesse angulaire de rotation de son rayon vecteur est constante et égale à 6° par seconde. Déterminer la vitesse d'allongement du rayon vecteur r à l'instant où $r = 25$ cm.

666. Une tige non homogène AB a une longueur de 12 cm. La masse de la partie AM de cette tige est proportionnelle au carré de la distance du point courant M à l'extrémité A et est de 10 g pour $AM = 2$ cm. Déterminer la masse de la tige entière AB et la densité linéaire en un point quelconque M. Déterminer la densité linéaire de la tige aux extrémités A et B?

§ 5. Dérivées d'ordres supérieurs au premier

1°. Définition des dérivées d'ordres supérieurs. On appelle, par définition, *dérivée du deuxième ordre* ou *dérivée seconde* de la fonction $y = f(x)$ la dérivée de sa dérivée, c'est-à-dire

$$y'' = (y')'.$$

On désigne la dérivée seconde par l'une des notations:

$$y'', \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f''(x).$$

Si $x = f(t)$ est la loi du mouvement rectiligne d'un point, alors $\frac{d^2x}{dt^2}$ est l'accélération de ce mouvement.

D'une manière générale, la *dérivée d'ordre n* ou la *dérivée n-ième* d'une fonction $y = f(x)$ est par définition la dérivée de la dérivée d'ordre $(n - 1)$. Pour la dérivée d'ordre n, on fait usage des notations

$$y^{(n)}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \text{ou} \quad f^{(n)}(x).$$

Exemple 1. Calculer la dérivée du deuxième ordre de la fonction

$$y = \ln(1 - x).$$

Solution. $y' = \frac{-1}{1-x}$; $\quad y'' = \left(\frac{-1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2°. Formule de Leibniz. Si les fonctions $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ possèdent des dérivées jusqu'à l'ordre n inclus, alors on peut calculer la dérivée d'ordre n du produit de ces deux fonctions à l'aide de la *formule de Leibniz*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

3°. Dérivées du n-ième ordre des fonctions données sous forme paramétrique. Si

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

alors les dérivées $y'_x = \frac{dy}{dx}$, $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, peuvent respectivement être calculées par les formules

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \text{ etc.}$$

La dérivée du deuxième ordre est donnée par la formule

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Exemple 2. Calculer y'' si

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Solution. On a

$$y' = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{b\cdot\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$$

et

$$y'' = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

A. Dérivées d'ordres supérieurs des fonctions explicites

Dans les exercices ci-dessous, calculer la dérivée du second ordre des fonctions données.

667. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

668. $y = e^{x^2}$.

669. $y = \sin^2 x$.

670. $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

671. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$.

672. $f(x) = (1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x$.

673. $y = (\arcsin x)^2$.

674. $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

675. Montrer que la fonction $y = \frac{x^2+2x+2}{2}$ satisfait à l'équation différentielle $1 + y'^2 = 2yy''$.

676. Montrer que la fonction $y = \frac{1}{2}x^2e^x$ satisfait à l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^x$.

677. Montrer que la fonction $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ satisfait, quelles que soient les constantes arbitraires C_1 et C_2, à l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$.

678. Montrer que la fonction $y = e^{2x}\sin 5x$ satisfait à l'équation $y'' - 4y' + 29y = 0$.

679. Calculer y''', si $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

680. Calculer $f'''(3)$, si $f(x) = (2x-3)^5$.

681. Calculer $y^{(V)}$ pour la fonction $y = \ln(1+x)$.

682. Calculer $y^{(VI)}$ pour la fonction $y = \sin 2x$.

683. Montrer que la fonction $y = e^{-x}\cos x$ satisfait à l'équation différentielle $y^{(IV)} + 4y = 0$.

684. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$ si $f(x) = e^x \sin x$.

685. L'équation du mouvement d'un point de l'axe OX est

$$x = 100 + 5t - 0{,}001t^3.$$

Calculer la vitesse et l'accélération de ce point aux instants $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

686. Un point M se déplace sur la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ avec une vitesse angulaire ω constante. Déterminer la loi du mouvement de sa projection M_1 sur l'axe OX, si à l'instant $t = 0$ le point M occupait la position M_0 $(a, 0)$ (fig. 18). Calculer la vitesse et l'accélération du mouvement de ce point.

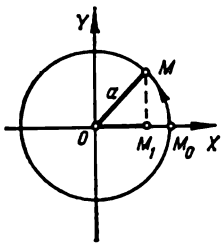


Fig. 18

Déterminer la vitesse et l'accélération du point M_1 à l'instant initial et lorsqu'il repasse à l'origine des coordonnées.

Quelles sont les valeurs maximales des grandeurs absolues de la vitesse et de l'accélération du point M_1?

687. Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction $y = (ax + b)^n$ (n est un nombre entier).

688. Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions:

a) $y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \sqrt{x}$.

689. Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions:

a) $y = \sin x$; e) $y = \frac{1}{1+x}$;

b) $y = \cos 2x$; f) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

c) $y = e^{-3x}$; g) $y = \sin^2 x$;

d) $y = \ln(1+x)$; h) $y = \ln(ax+b)$.

690. Appliquer la formule de Leibniz pour calculer $y^{(n)}$, si:

a) $y = x \cdot e^x$; b) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$;

c) $y(1-x^2)\cos x$; d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$;

e) $y = x^3 \ln x$.

691. Calculer $f^{(n)}(0)$, si $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

B. Dérivées d'ordres supérieurs des fonctions données sous forme paramétrique et des fonctions implicites

Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans les exercices ci-dessous.

692. a) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

693. a) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

694. a) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$

695. a) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$

696. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

697. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour $t = 0$ si $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$

698. Montrer que y en tant que fonction de x définie par les formules $x = \sin t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} - be^{-t\sqrt{2}}$ vérifie, quelles que soient les constantes a et b, l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Calculer $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ dans les exercices ci-dessous.

699. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$

700. $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

701. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

702. Calculer $\frac{d^ny}{dx^n}$ si $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^m. \end{cases}$

703. La fonction $y = f(x)$ étant donnée, on demande de calculer les dérivées x'', x''' de la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$.

704. Calculer y'' si $x^2 + y^2 = 1$.

Solution. On a, d'après la règle de dérivation des fonctions composées, $2x + 2yy' = 0$, d'où $y' = -\frac{x}{y}$ et $y'' = -\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y - xy'}{y^2}$. Substituant y' par sa valeur, on a finalement :

$$y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

On demande, dans les exercices ci-dessous, de déterminer la dérivée y'' de la fonction $y = f(x)$ donnée sous forme implicite.

705. $y^2 = 2px$.

706. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

707. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

708. En partant de l'équation $y = x + \ln y$, calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}$.

709. Calculer y'' au point $(1; 1)$ si

$$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0.$$

710. Calculer y'' au point $(0; 1)$ si

$$x^4 - xy + y^4 = 1.$$

711. a) La fonction y est donnée sous forme implicite par l'équation

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0.$$

Calculer $\frac{d^3y}{dx^3}$ au point $(1; 1)$.

b) Calculer $\frac{d^3y}{dx^3}$ si $x^2 + y^2 = a^2$.

§ 6. Différentielles du premier ordre et d'ordres supérieurs

1°. Différentielle du premier ordre. La *différentielle (du premier ordre) de la fonction* $y = f(x)$ est, par définition, la partie principale de son accroissement, linéaire par rapport à l'accroissement $\Delta x = dx$ de la variable indépendante x. La diffé-

rentielle d'une fonction est égale au produit de sa dérivée par la différentielle de la variable indépendante

$$dy = y'dx.$$

D'où

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Si MN désigne un arc de courbe du graphique de la fonction $y = f(x)$ (fig. 19), MT la tangente au point $M(x, y)$ avec

$$PQ = \Delta x = dx,$$

alors l'accroissement de l'ordonnée de la tangente est

$$AT = dy$$

et le segment

$$AN = \Delta y.$$

Exemple 1. Calculer l'accroissement et la différentielle de la fonction $y = 3x^2 - x$.

Solution. Première méthode:

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x$$

ou

$$\Delta y = (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Par conséquent,

$$dy = (6x - 1)\Delta x = (6x - 1)dx.$$

Deuxième méthode:

$$y' = 6x - 1; \quad dy = y'dx = (6x - 1)dx.$$

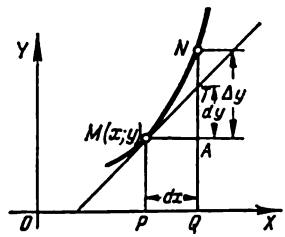


Fig. 19

Exemple 2. Calculer Δy et dy pour la fonction $y = 3x^2 - x$ pour $x = 1$ et $\Delta x = 0{,}01$.

Solution. $\Delta y = (6x - 1)\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5\cdot 0{,}01 + 3\cdot(0{,}01)^2 = 0{,}0503$

et

$$dy = (6x - 1)\Delta x = 5\cdot 0{,}01 = 0{,}0500.$$

2°. Propriétés fondamentales des différentielles:

1) $dc = 0$, où c est une constante.
2) $dx = \Delta x$, où x est la variable indépendante.
3) $d(cu) = c\,du$.
4) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
5) $d(uv) = u\,dv + v\,du$.
6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \qquad (v \neq 0)$.
7) $df(u) = f'(u)\,du$.

3°. Applications de la différentielle aux calculs approchés. Si l'accroissement Δx de la variable indépendante x est petite en valeur absolue, alors la différentielle

dy et l'accroissement Δy de la fonction $y = f(x)$ sont approximativement égales

$$\Delta y \approx dy,$$

c'est-à-dire

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

d'où

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Exemple 3. Dire de combien varie approximativement le côté d'un carré si son aire augmente de 9 m² à 9,1 m²?

Solution. Si x désigne l'aire du carré et y son côté, alors

$$y = \sqrt{x}.$$

Par l'hypothèse $x = 9$, $\Delta x = 0{,}1$.

On calcule approximativement l'accroissement Δy du côté du carré par

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 0{,}016 \text{ m}.$$

4°. Différentielles d'ordres supérieurs. La *différentielle du deuxième ordre* est par définition la différentielle de la différentielle du premier ordre:

$$d^2y = d(dy).$$

De manière analogue, on définit les notions de *différentielle du troisième ordre*, etc.

Si $y = f(x)$ et si x est la variable indépendante, alors

$$d^2y = y''(dx)^2,$$
$$d^3y = y'''(dx)^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Si $y = f(u)$, où $u = \varphi(x)$, alors

$$d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u,$$
$$d^3y = y'''(du)^3 + 3y''du \cdot d^2u + y'd^3u,$$

etc. (Ici les primes indiquent les dérivations par rapport à u).

712. Calculer l'accroissement Δy et la différentielle dy de la fonction $y = 5x + x^2$ pour $x = 2$ et $\Delta x = 0{,}001$.

713. Calculer

$$d(1 - x^3)$$

pour $x = 1$ et $\Delta x = -\frac{1}{3}$ sans se servir de la dérivée.

714. L'aire S d'un carré de côté x est donnée par la formule $S = x^2$. Calculer l'accroissement et la différentielle

de cette fonction et en déduire la signification géométrique de cette dernière.

715. Donner une interprétation géométrique de l'accroissement et de la différentielle pour les fonctions suivantes:

a) l'aire du cercle $S = \pi x^2$; b) le volume du cube $v = x^3$.

716. Montrer que si $\Delta x \to 0$ l'accroissement de la fonction $y = 2^x$ correspondant à l'accroissement Δx de x pour tout x est équivalent à l'expression $2^x \ln 2\Delta x$.

717. Pour quelle valeur de x la différentielle de la fonction $y = x^2$ n'est pas équivalente à l'accroissement de la fonction lorsque $\Delta x \to 0$?

718. La fonction $y = |x|$ possède-t-elle une différentielle pour $x = 0$?

719. En utilisant la dérivée, calculer la différentielle de la fonction $y = \cos x$ pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $\Delta x = \frac{\pi}{36}$.

720. Calculer la différentielle de la fonction

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

pour $x = 9$ et $\Delta x = -0{,}01$.

721. Calculer la différentielle de la fonction

$$y = \operatorname{tg} x$$

pour $x = \frac{\pi}{3}$ et $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

On demande, dans les exercices ci-dessous, de calculer la différentielle et l'accroissement des fonctions données pour les valeurs arbitraires de la variable indépendante.

722. $y = \frac{1}{x^m}$.

723. $y = \frac{x}{1-x}$.

724. $y = \arcsin \frac{x}{a}$.

725. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

726. $y = e^{-x^2}$.

727. $y = x \ln x - x$.

728. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

729. $r = \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{cosec} \varphi$.

730. $s = \operatorname{arctg} e^t$.

731. Calculer dy, si $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

Solution. D'après la propriété d'invariance de la différentielle, on trouve:

$$2x\,dx + 2(y\,dx + x\,dy) - 2y\,dy = 0.$$

D'où

$$dy = -\frac{x+y}{x-y}\,dx.$$

On demande, dans les exercices ci-dessous, de calculer la différentielle des fonctions données sous forme implicite.

732. $(x + y)^2 \cdot (2x + y)^3 = 1.$

733. $y = e^{-\frac{x}{y}}.$

734. $\ln \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

735. Calculer dy au point (1; 2), si $y^3 - y = 6x^2$.

736. Calculer approximativement la valeur de $\sin 31°$.

Solution. Posons $x = \operatorname{arc} 30° = \frac{\pi}{6}$ et $\Delta x = \operatorname{arc} 1° = \frac{\pi}{180}$. La formule (1) (voir 3°) donne $\sin 31° \approx \sin 30° + \frac{\pi}{180} \cos 30° = 0{,}500 + 0{,}017 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}515.$

737. En remplaçant l'accroissement de la fonction par sa différentielle calculer approximativement:

a) $\cos 61°$; c) $e^{0,2}$; e) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

b) $\operatorname{tg} 44°$; d) $\ln 0{,}9$;

738. Dire approximativement de combien augmente le volume d'une sphère si son rayon $R = 15$ cm s'allonge de 2 mm?

739. Etablir la formule approchée (pour des $|\Delta x|$ petits par rapport à x)

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

Calculer approximativement $\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{640}$ à l'aide de cette formule.

740. Etablir la formule approchée

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

et calculer approximativement les valeurs de $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[3]{200}$.

741. Calculer la valeur approchée des fonctions:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, pour $x = 1{,}03$;

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, pour $x = 0{,}2$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, pour $x=0{,}1$;

d) $y=e^{1-x^2}$, pour $x=1{,}05$.

742. Calculer la valeur approchée de tg 45°3′20″.

743. Calculer approximativement arcsin 0,54.

744. Calculer approximativement $\sqrt[4]{17}$.

745. En se basant sur la loi d'Ohm $I=\frac{E}{R}$ montrer que les petites variations de l'intensité de courant correspondent aux petites variations de la résistance et qu'on peut les calculer approximativement à l'aide de la formule

$$\Delta I=-\frac{I}{R}\cdot\Delta R.$$

746. Montrer qu'une erreur relative de 1 % faite lorsqu'on mesure la longueur du rayon d'un cercle ou d'une sphère entraîne une erreur relative approximative de 2 % pour l'aire du cercle et celle de la sphère.

747. Calculer d^2y, si $y=\cos 5x$.

Solution. $d^2y=y''(dx^2)=-25\cos 5x\,(dx)^2$.

748. $u=\sqrt{1-x^2}$, calculer d^2u.

749. $y=\arccos x$, calculer d^2y.

750. $y=\sin x\ln x$, calculer d^2y.

751. $z=\frac{\ln x}{x}$, calculer d^2z.

752. $z=x^2e^{-x}$, calculer d^3z.

753. $z=\frac{x^4}{2-x}$, calculer d^4z.

754. $u=3\sin(2x+5)$, calculer d^nu.

755. $y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, calculer d^ny.

§ 7. Théorèmes de la moyenne

1°. Théorème de Rolle. Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $a\leqslant x\leqslant b$, possède une dérivée $f'(x)$ en chaque point intérieur de cet intervalle fermé et si

$$f(a)=f(b),$$

il existe alors au moins une valeur de la variable indépendante $x=\xi$, avec $a<\xi<b$ telle que

$$f'(\xi)=0.$$

2°. Théorème de Lagrange. Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $a\leqslant x\leqslant b$ et possède une dérivée

en chaque point intérieur de cet intervalle fermé, alors

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$$

où $a < \xi < b$.

3°. Théorème de Cauchy. Si les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont continues sur l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ et si pour $a < x < b$ elles possèdent des dérivées qui ne s'annulent pas simultanément et si $F(b) \neq F(a)$, alors

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \text{où } a < \xi < b.$$

756. Montrer que la fonction $f(x) = x - x^3$ satisfait au théorème de Rolle sur les intervalles fermés $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$. Déterminer les valeurs correspondantes de ξ.

Solution. La fonction $f(x)$ est continue et dérivable pour toutes les valeurs de x, de plus $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Rolle pour intervalles fermés $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$. Pour déterminer ξ, formons l'équation $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$.

D'où $\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ avec $-1 < \xi_1 < 0$, $0 < \xi_2 < 1$.

757. La fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ prend aux extrémités de l'intervalle fermé $[0; 4]$ des valeurs égales

$$f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}.$$

Peut-on appliquer le théorème de Rolle à cette fonction sur l'intervalle fermé $[0; 4]$?

758. Est-ce que les conditions du théorème de Rolle sont vérifiées pour la fonction

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

sur le segment $[0; \pi]$?

759. Soit

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Montrer que l'équation

$$f'(x) = 0$$

a trois racines réelles.

760. L'équation

$$e^x = 1 + x,$$

comme il est évident, a $x = 0$ pour racine. Montrer que cette équation n'a pas d'autres racines réelles.

761. On demande de vérifier si les conditions du théorème de Lagrange sont satisfaites pour la fonction

$$f(x) = x - x^3$$

sur l'intervalle fermé $[-2; 1]$ et trouver la valeur intermédiaire correspondante de ξ.

Solution. La fonction $f(x) = x - x^3$ est continue et dérivable pour toutes les valeurs de x, de plus $f'(x) = 1 - 3x^2$. D'où, d'après la formule de Lagrange, on a $f(1) - f(-2) = 0 - 6 = [1 - (-2)]f'(\xi)$, c'est-à-dire $f'(\xi) = -2$. Par conséquent, $1 - 3\xi^2 = -2$ et $\xi = \pm 1$; ainsi seule la valeur $\xi = -1$ est acceptable, pour laquelle l'inégalité $2 < \xi < 1$ est vérifiée.

762. On demande de vérifier si les conditions du théorème de Lagrange sont vérifiées et de calculer la valeur intermédiaire correspondante ξ pour la fonction $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ sur l'intervalle fermé $[-1; 1]$.

763. Trouver un point sur la parabole $y = x^2$ compris entre les points $A(1; 1)$ et $B(3; 9)$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à la corde AB.

764. Démontrer la formule

$$\sin(x + h) - \sin x = h \cos \xi$$

où $x < \xi < x + h$ à l'aide du théorème de Lagrange.

765. a) Vérifier les conditions du théorème de Cauchy pour les fonctions $f(x) = x^2 + 2$ et $F(x) = x^3 - 1$ sur l'intervalle fermé $[1, 2]$ et déterminer ξ;

b) même exercice pour les fonctions $f(x) = \sin x$ et $F(x) = \cos x$ sur l'intervalle fermé $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

§ 8. Formule de Taylor

Si la fonction $f(x)$ est continue et si elle possède des dérivées continues d'ordre $(n - 1)$ inclus sur l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ (ou $b \leqslant x \leqslant a$), si, en outre, en chaque point intérieur de cet intervalle fermé la dérivée $f^{(n)}(x)$ existe et est finie, on a alors la *formule de Taylor*

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

sur cet intervalle fermé, où $\xi = a + \theta(x - a)$ et $0 < \theta < 1$.

En particulier, pour $a = 0$, on a (*formule de Maclaurin*)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \\ + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

où $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

766. Développer le polynôme $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ suivant les puissances entières du binôme $x - 2$.

Solution. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geqslant 4$. D'où

$$f(2) = 11;\ f'(2) = 7;\ f''(2) = 8;\ f'''(2) = 6.$$

Par conséquent,

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + (x-2)\cdot 7 + \frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8 + \frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6$$

ou

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

767. Développer la fonction $f(x) = e^x$ suivant les puissances du binôme $x + 1$ en s'arrêtant aux termes contenant $(x+1)^3$.

Solution. $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tous les n, $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$. Par conséquent,

$$e^x = \frac{1}{e} + (x+1)\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^4}{4!} e^{\xi},$$

où $\xi = -1 + \theta(x+1)$; $0 < \theta < 1$.

768. Développer la fonction $f(x) = \ln x$ suivant les puissances de $x - 1$ en s'arrêtant aux termes contenant $(x-1)^2$.

769. Développer la fonction $f(x) = \sin x$ suivant les puissances de x en s'arrêtant aux termes contenant x^3 et au terme x^5.

770. Développer la fonction $f(x) = e^x$ suivant les puissances de x en s'arrêtant au terme contenant x^{n-1}.

771. Montrer que $\sin(a + h)$ diffère de

$$\sin a + h \cos a$$

d'une quantité non supérieure à $\frac{1}{2} h^2$.

772. Expliquer d'où proviennent les formules approchées

a) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2, \quad |x|<1,$

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2, \quad |x|<1$

et évaluer l'erreur commise.

773. Evaluer l'erreur commise dans la formule

$$e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}.$$

774. Une corde pesante suspendue sous l'action de son poids prend la forme de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Montrer que, pour des $|x|$ petits, la forme de cette corde est donnée approximativement par la parabole d'équation

$$y = a+\frac{x^2}{2a}.$$

775*. Montrer que pour $|x| \ll a$ on a l'égalité approchée

$$e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

à $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ près.

§ 9. Règle de Lhopital-Bernoulli pour lever les indéterminations

1°. Indéterminations des types $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions univoques dérivables pour $0 < |x-a| < h$, dont la dérivée de l'une d'elles ne s'annule pas.

Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont infiniment petits ou infiniment grands pour $x \to a$, c'est-à-dire si le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ présente au point $x = a$ une indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

si la limite du rapport des dérivées existe.

La règle est également vraie dans le cas $a = \infty$.

Si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour $x = a$ présente de nouveau une indétermination de l'un des types indiqués et si $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ vérifient

les conditions énoncées pour $f(x)$ et $\varphi(x)$, on peut alors passer aux rapports de dérivées secondes, etc.

Toutefois, il faut remarquer que la limite du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ peut exister sans que celle du rapport des dérivées existe (voir exercice n° 809).

2°. Autres indéterminations. Pour lever une indétermination du type $0\cdot\infty$, on transforme le produit $f_1(x)\cdot f_2(x)$, où $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, en rapport $\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$ $\left(\text{du type } \frac{0}{0}\right)$ ou $\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$ $\left(\text{du type } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Dans le cas d'une indétermination du type $\infty-\infty$, il faut transformer la différence $f_1(x)-f_2(x)$ en produit $f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$ et lever d'abord l'indétermination pour $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$; si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, on met la différence $f_1(x)-f_2(x)$ sous la forme

$$\frac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}\left(\text{du type } \frac{0}{0}\right).$$

Les indéterminations des types 1^∞, 0^0, ∞^0 peuvent être levées en prenant d'abord le logarithme et en calculant la limite du logarithme de $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ (ce qui se ramène à lever une indétermination du type $0\cdot\infty$).

Dans certains cas, il est fructueux de combiner la règle de Lhopital et la détermination de limites à l'aide des transformations élémentaires.

Exemple 1. Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\left(\text{du type } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Solution. On a, en appliquant la règle de Lhopital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Nous avons une indétermination du type $\frac{0}{0}$, mais il n'y a pas lieu d'appliquer la règle de Lhopital, puisque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x=1\cdot 0=0.$$

Ainsi, on a finalement

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=0.$$

Exemple 2. Calculer

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \text{ (du type } \infty-\infty).$$

On trouve, en réduisant les fractions au même dénominateur,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\ \left(\text{du type } \frac{0}{0}\right).$$

Avant d'appliquer la règle de Lhopital, remarquons que le dénominateur de cette dernière fraction est équivalent à l'infiniment petit (chap. I, § 4) $x^2\sin^2 x \sim x^4$. On trouve donc

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\ \left(\text{du type } \frac{0}{0}\right).$$

D'après la règle de Lhopital,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}.$$

On trouve, en continuant à l'aide de transformations élémentaires

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

Exemple 3. Calculer

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \text{ (du type } 1^\infty).$$

En prenant le logarithme et en appliquant la règle de Lhopital, on trouve :

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}=-6.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}=e^{-6}.$$

On demande de déterminer la limite des fonctions dans les exercices ci-dessous.

776. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Solution. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}=\dfrac{1}{2}$.

777. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

778. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$.

779. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$.

780. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.

781. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$.

782. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

783. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

784. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

785. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$.

786. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$.

787. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.

Solution. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot 1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=0.$

788. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

789. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg} x$.

790. $\lim\limits_{x\to 0}(x^n e^{-x})$, $n>0$.

791. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$.

792. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\sin\dfrac{a}{x}$, $n>0$.

793. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$.

794. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Solution. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\dfrac{1}{x}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x-\dfrac{1}{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=$

$=\dfrac{1}{2}.$

795. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

796. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$.

797. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

798. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Solution. On a $x^x=y$, $\ln y=x\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,\ \text{d'où}\ \lim_{x\to 0} y=1,\ \lim_{x\to 0} x^x=1.$$

799. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

800. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

801. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

802. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

803. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

804. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1-x}}$.

805. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$.

806. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

807. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

808. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

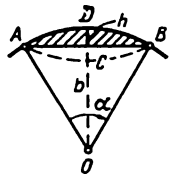


Fig. 20

809. Démontrer que les limites

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$

ne peuvent être calculées par la règle de Lhopital-Bernoulli. Trouver ces limites directement.

810*. Démontrer que l'aire d'un segment circulaire d'angle au centre α petit, de corde $AB=b$ et de flèche $CD=h$ (fig. 20) est approximativement égale à

$$S\approx\frac{2}{3}bh$$

avec une erreur relative aussi petite que l'on veut pour $\alpha\to 0$.

CHAPITRE III

EXTRÉMUMS DES FONCTIONS ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA DÉRIVÉE

§ 1. Extrémums d'une fonction d'une variable

1°. Fonctions croissantes et fonctions décroissantes. On dit que la fonction $y = f(x)$ est *croissante* (resp. *décroissante*) sur un intervalle ouvert (ou sur un intervalle fermé) si, quels que soient les points x_1 et x_2 de cet intervalle ouvert (ou fermé), l'inégalité $x_1 < x_2$ entraîne l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$

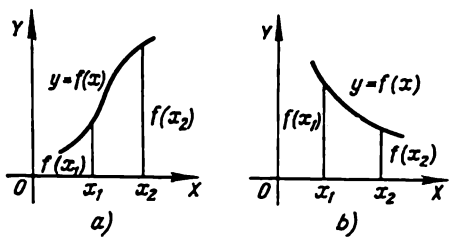


Fig. 21

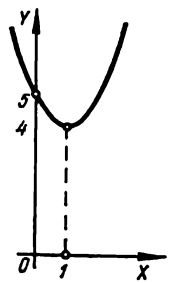


Fig. 22

(fig. 21,*a*) (resp. $f(x_1) > f(x_2)$ (fig. 21,*b*)). Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour $a < x < b$, alors $f(x)$ est une fonction croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Dans les cas simples, le domaine d'existence d'une fonction $f(x)$ peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles de croissance et de décroissance de la fonction (*intervalles de monotonie*). Ces intervalles sont limités par les points critiques x (où $f'(x) = 0$ ou soit encore $f'(x)$ n'existe pas).

Exemple 1. Etudier la croissance et la décroissance de la fonction

$$y = x^2 - 2x + 5.$$

Solution. Calculons la dérivée

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1). \qquad (1)$$

D'où $y' = 0$ pour $x = 1$. On obtient deux intervalles de monotonie $(-\infty, 1)$ et $(1, +\infty)$. La formule (1) donne: 1) si $-\infty < x < 1$, alors $y' < 0$ et, par conséquent, la fonction $f(x)$ décroît dans l'intervalle ouvert $(-\infty, 1)$; 2) si $1 < x < +\infty$, alors $y' > 0$ et, par conséquent, la fonction $f(x)$ croît dans l'intervalle ouvert $1, +\infty)$ (fig. 22).

Exemple 2. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction

$$y = \frac{1}{x+2}.$$

Solution. Le point $x = -2$ est un point de discontinuité de la fonction et $y' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$ pour $x \neq -2$. Par conséquent, la fonction y décroît dans les intervalles ouverts $-\infty < x < -2$ et $-2 < x < +\infty$.

Exemple 3. Etudier la croissance et la décroissance de la fonction

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3.$$

Solution. On a

$$y' = x^4 - x^2. \tag{2}$$

En résolvant l'équation $x^4 - x^2 = 0$, on trouve les points $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ où la dérivée y' s'annule. Puisque y' peut changer de signe seulement lorsqu'on traverse les points où elle s'annule ou bien les points où elle a une discontinuité (dans le cas considéré y' n'a pas de discontinuité), dans chacun de ces intervalles ouverts $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, +\infty)$, la dérivée conserve un signe constant et, par suite, dans chacun de ces intervalles la fonction est monotone. Pour savoir dans quels intervalles la fonction croît et dans quels intervalles la fonction décroît, il faut déterminer le signe de la dérivée dans chacun de ces intervalles. Pour déterminer le signe de y' dans l'intervalle $(-\infty, -1)$, il suffit de connaître le signe de y' en un point quelconque de cet intervalle; par exemple, au point $x = -2$ on déduit de (2) $y' = 12 > 0$; par conséquent, $y' > 0$ dans l'intervalle ouvert $(-\infty, -1)$ et la fonction est croissante sur cet intervalle ouvert. De même, on trouve que $y' < 0$ dans l'intervalle ouvert $(-1, 0)$ $\left(\text{pour le vérifier, il suffit, par exemple, de faire } x = -\frac{1}{2}\right)$, $y' < 0$ dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$ $\left(\text{on peut faire ici } x = \frac{1}{2}\right)$ et $y' > 0$ dans l'intervalle ouvert $(1, +\infty)$.

Ainsi, la fonction considérée croît dans l'intervalle ouvert $(-\infty, -1)$, décroît dans l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ et croît dans l'intervalle ouvert $(1, +\infty)$.

2°. Extrémums des fonctions. S'il existe un voisinage du point x_0 tel que pour chaque point $x \neq x_0$ de ce voisinage l'inégalité $(f(x) > f(x_0))$ est vérifiée, on dit que le point x_0 est un *point de minimum* pour la fonction $y = f(x)$ et que le nombre $f(x_0)$

est le *minimum* de cette fonction $y=f(x)$. De même, si pour chaque point $x \neq x_1$ d'un certain voisinage du point x_1 l'inégalité $f(x) < f(x_1)$ est vérifiée, on dit que x_1 est un *point de maximum* pour la fonction $f(x)$ et que $f(x_1)$ est le *maximum* de cette fonction (fig. 23). Les points de minimum et de maximum d'une fonction s'appellent, par définition, *points d'extrémum* et les minimums et les maximums de la fonction, les *extrémums*. Si x_0 est un point d'extrémum de la fonction $f(x)$, alors $f'(x_0) = 0$ ou bien $f'(x_0)$ n'existe pas (condition nécessaire d'existence d'un extrémum). La proposition inverse n'est pas vraie. Les points en lesquels $f'(x) = 0$ ou n'existe pas (*points critiques*) ne sont pas nécessairement des points d'extrémum pour la fonction $f(x)$. Les critères suffisants d'existence ou d'absence d'extrémums pour une fonction continue $f(x)$ sont donnés par les règles suivantes :

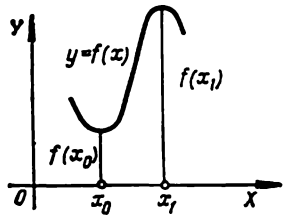


Fig. 23

1. S'il existe un voisinage $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ du point critique x_0 où $f'(x) > 0$ pour $x_0 - \delta < x < x_0$ et $f'(x) < 0$ pour $x_0 < x < x_0 + \delta$, alors x_0 est un point de maximum pour la fonction $f(x)$; et si $f'(x) < 0$ pour $x_0 - \delta < x < x_0$ et $f'(x) > 0$ pour $x_0 < x < x_0 + \delta$, alors x_0 est un point de minimum pour la fonction $f(x)$.

Si enfin on peut trouver un nombre positif δ tel que $f'(x)$ conserve un signe constant pour $0 < |x - x_0| < \delta$, alors on dit que x_0 n'est pas un point d'extrémum pour la fonction $f(x)$.

2. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un point de maximum ; si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un point de minimum ; et si $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$, alors le point x_0 n'est pas un point d'extrémum.

D'une manière générale, supposons que la première dérivée non nulle au point x_0 soit la dérivée d'ordre k de la fonction $f(x)$. Si k est pair, x_0 est un point d'extrémum, à savoir un point de maximum si $f^{(k)}(x_0) < 0$ et un point de minimum si $f^{(k)}(x_0) > 0$. Si k est impair, le point x_0 n'est pas un point d'extrémum.

E x e m p l e 4. Trouver les extrémums de la fonction

$$y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$$

S o l u t i o n. Calculons la dérivée

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1). \qquad (3)$$

En égalant à 0 la dérivée y', on a :

$$\sqrt[3]{x} + 1 = 0.$$

D'où on trouve le point critique $x_1 = -1$. La formule (3) donne : si $x = -1 - h$, où h est un nombre positif arbitraire suffisamment petit, $y' > 0$; si $x = -1 + h$, alors $y' < 0$*). Par conséquent,

*) Si on a des difficultés pour déterminer le signe de y', on peut avoir recours à un calcul arithmétique en prenant pour h un nombre positif suffisamment petit.

$x_1 = -1$ est un point de maximum de la fonction y, de plus $y_{max} = 1$. En égalant à 0 le dénominateur de y' donné par (3), nous trouvons

$$\sqrt[3]{x} = 0;$$

d'où l'on trouve que le deuxième point critique de la fonction est $x_2 = 0$ où la dérivée y' n'existe pas. Pour $x = -h$, il est évident que $y' < 0$; pour $x = h$ on a $y' > 0$. Par conséquent, $x_2 = 0$ est un point de minimum de la fonction y, de plus, $y_{min} = 0$ (fig. 24). L'étude du comportement de la fonction au voisinage du point $x = -1$ peut également être faite à l'aide de la dérivée seconde

$$y'' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Ici $y'' < 0$ pour $x_1 = -1$, et, par conséquent, $x_1 = -1$ est un point de maximum de la fonction.

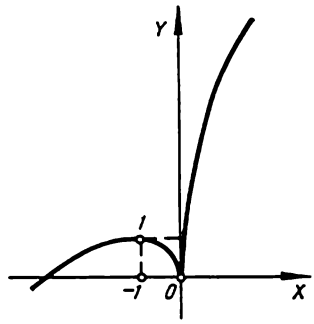


Fig. 24

3°. Plus grande valeur et plus petite valeur. La plus petite (resp. la plus grande) valeur d'une fonction continue $f(x)$ sur l'intervalle fermé $[a, b]$ est atteinte soit au point critique de la fonction, soit encore aux extrémités de l'intervalle fermé $[a, b]$.

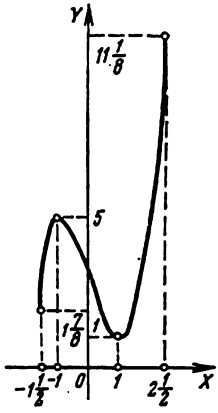


Fig. 25

Exemple 5. Trouver la plus petite et la plus grande valeur de la fonction

$$y = x^3 - 3x + 3$$

sur l'intervalle fermé $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\frac{1}{2}$.

Solution. Puisque

$$y' = 3x^2 - 3,$$

les points critiques de la fonction y sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$. En comparant les valeurs de la fonction en ces points et les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle fermé considéré

$$y(-1) = 5;\ y(1) = 1;\ y\left(-1\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{8};$$

$$y\left(2\frac{1}{2}\right) = 11\frac{1}{8},$$

on en déduit (fig. 25) que la plus petite valeur de la fonction $m = 1$ est atteinte au point $x = 1$ (au point de minimum) et la plus grande valeur $M = 11\frac{1}{8}$ au point $x = 2\frac{1}{2}$ (à l'extrémité droite de l'intervalle fermé).

Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions:

811. $y = 1 - 4x - x^2$.
812. $y = (x-2)^2$.
813. $y = (x+4)^3$.
814. $y = x^2(x-3)$.
815. $y = \frac{x}{x-2}$.
816. $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.
817. $y = \frac{x}{x^2-6x-16}$.
818. $y = (x-3)\sqrt{x}$.
819. $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.
820. $y = x + \sin x$.
821. $y = x \ln x$.
822. $y = \arcsin(1+x)$.
823. $y = 2e^{x^2-4x}$.
824. $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$.
825. $y = \frac{e^x}{x}$.

Etudier les extrémums des fonctions suivantes:

826. $y = x^2 + 4x + 6$.

Solution. Calculons la dérivée de la fonction donnée: $y' = 2x + 4$. En égalant y' à 0, on trouve les valeurs critiques de la variable indépendante $x = -2$. Puisque $y' < 0$ pour $x < -2$ et $y' > 0$ pour $x > -2$; $x = -2$ est un point de minimum de la fonction donnée, de plus $y_{\min} = 2$. On trouve le même résultat en étudiant le signe de la dérivée seconde au voisinage du point critique $y'' = 2 > 0$.

827. $y = 2 + x - x^2$.
828. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.
829. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Solution. Calculons la dérivée

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

En égalant à 0 la dérivée y', on trouve les points critiques $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. Pour déterminer le caractère des extrémums, calculons la dérivée seconde $y'' = 6(2x + 1)$. Puisque $y''(-2) < 0$, alors $x_1 = -2$ est un point de maximum de la fonction y, de plus $y_{\max} = 25$. De même, on a $y''(1) > 0$. Donc, $x_2 = 1$ est un point de minimum de la fonction y et $y_{\min} = -2$.

830. $y = x^2(x-12)^2$.
831. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.
832. $y = \frac{x^3}{x^2+3}$.
833. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.
834. $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.
835. $y = \frac{16}{x(4-x^2)}$.
836. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.
837. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.
838. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

839. $y = 2\sin 2x + \sin 4x$.

840. $y = 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{3}$.

841. $y = x - \ln(1+x)$.

842. $y = x\ln x$.

843. $y = x\ln^2 x$.

844. $y = \operatorname{ch} x$.

845. $y = xe^x$.

846. $y = x^2e^{-x}$.

847. $y = \frac{e^x}{x}$.

848. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

Déterminer la plus grande et la plus petite valeur des fonctions sur les intervalles fermés donnés (si l'intervalle fermé n'est pas indiqué, il faut alors déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la fonction dans tout le domaine d'existence).

849. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

850. $y = \sqrt{x(10-x)}$.

851. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

852. $y = \arccos x$.

853. $y = x^3$ sur l'intervalle fermé $[-1, 3]$.

854. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ a) sur l'intervalle fermé $[-1, 5]$; b) sur l'intervalle fermé $[-10, 12]$.

855. Montrer que, pour les valeurs positives de x, l'inégalité

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

est vérifiée.

856. Déterminer les coefficients p et q du trinôme du second degré $y = x^2 + px + q$ de manière que ce trinôme ait pour minimum $y = 3$ pour $x = 1$. Expliquer géométriquement le résultat obtenu.

857. Démontrer l'inégalité

$$e^x > 1 + x, \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

Solution. Considérons la fonction

$$f(x) = e^x - (1 + x).$$

On trouve facilement que cette fonction a un minimum unique $f(0) = 0$. Par conséquent,

$$f(x) > f(0), \text{ pour } x \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$e^x > 1 + x, \text{ pour } x \neq 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Démontrer les inégalités:

858. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, pour $x > 0$.

859. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, pour $x \neq 0$.

860. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, pour $x > 0$.

861. Décomposer le nombre positif a en deux parties de manière que leur produit soit maximum.

862. Donner à un fil de fer de longueur l la forme d'un rectangle de manière que son aire soit maximum.

863. Parmi les triangles rectangles de périmètre $2p$ donné, déterminer celui dont l'aire est maximum.

864. On demande de construire une plate-forme rectangulaire de manière que trois de ses côtés soient limités par une grille, le quatrième étant adjacent à un mur de pierre. Quelle est la forme la plus avantageuse (du point de vue de l'aire) si l'on dispose de l mètres courants de grillage?

Fig. 26

865. A l'aide d'une feuille de carton de côté a, on demande de faire une boîte rectangulaire ouverte de capacité maximum en découpant des carrés sur les angles et en pliant les rebords de la figure obtenue en forme de croix.

866. Un réservoir ouvert de base carrée doit avoir une capacité de v litres. Quelles doivent être les dimensions du réservoir pour que la quantité de fer-blanc utilisée soit minimum?

867. Parmi les cylindres de volume donné, déterminer celui dont l'aire totale est minimum.

868. Inscrire dans une sphère donnée un cylindre de volume maximum.

869. Inscrire dans une sphère un cylindre de surface latérale maximum.

870. Inscrire dans une sphère un cône de volume maximum.

871. Inscrire dans une sphère un cône rectangle à base circulaire de surface latérale maximum.

872. Circonscrire à un cylindre donné un cône rectangle de volume minimum (les plans et les centres de leurs bases circulaires coïncident).

873. Parmi les cônes circonscrits à une sphère donnée, déterminer celui dont le volume est minimum.

874. Une bande de fer-blanc de largeur a doit être pliée de manière à obtenir une auge cylindrique ouverte (fig. 26). Déterminer l'angle au centre φ afin que la capacité de l'auge soit maximum.

875. Sur une feuille de forme circulaire on découpe un secteur de manière à obtenir un entonnoir de capacité maximum.

876. Un récipient ouvert est constitué d'un cylindre

se terminant vers le bas par une demi-sphère ; l'épaisseur des parois est constante. Déterminer les dimensions du récipient de manière que, pour une capacité donnée, le matériel employé soit minimum.

877. Déterminer la hauteur minimum $h = OB$ de la porte d'une tour verticale $ABCD$ de manière que l'on puisse faire passer par cette porte une tige rigide MN de longueur l et dont l'extrémité M glisserait sur l'horizontale AB. La largeur de la tour $d < l$ (fig. 27).

878. On donne un point M_0 (x_0, y_0) situé dans le premier quadrant du plan. Faire passer par ce point une droite de manière que le triangle formé par cette droite et les demi-axes de coordonnées positifs ait une aire minimum.

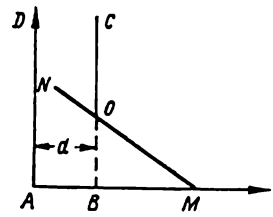


Fig. 27

879. Inscrire dans une ellipse un rectangle d'aire maximum et dont les côtés seraient parallèles aux axes de l'ellipse.

880. Inscrire dans le segment de parabole $y^2 = 2px$ déterminé par la droite $x = 2a$ un rectangle d'aire maximum.

881. Déterminer sur la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ un point, de manière que la tangente en ce point forme avec l'axe OX un angle dont la valeur absolue serait maximum.

882. Un coureur doit relier le point A qui se trouve sur une des rives d'un fleuve au point B sur la rive opposée. Sachant que le coureur se déplace sur la rive à une vitesse k fois plus grande que dans l'eau, déterminer l'angle sous lequel le coureur doit couper le fleuve pour qu'il atteigne le point B dans le temps minimum. La largeur du fleuve est h, la distance entre les points A et B (le long de la rive) est d.

883. Déterminer le point M du segment droit $AB = a$ reliant deux sources de lumière A (d'intensité p) et B (d'intensité q) qui est le plus faiblement éclairé (l'éclairement est inversement proportionnel au carré de la distance à la source lumineuse).

884. Une lampe est suspendue au centre d'une table ronde de rayon r. A quelle hauteur au-dessus de la table doit-on fixer la lampe pour que l'éclairement d'un objet se trouvant sur le bord de la table soit le meilleur? (L'eclai-

rement est directement proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence du rayon lumineux et inversement proportionnel au carré de la distance de la source lumineuse.)

885. On demande de découper dans un tronc d'arbre circulaire de diamètre d une poutre de section rectangulaire. Déterminer la largeur x et la hauteur y de cette section de manière que la poutre offre une résistance maximum : a) à la compression, b) à la flexion.

Remarque. La résistance de la poutre à la compression est proportionnelle à l'aire de sa section transversale et la résistance à la flexion au produit de la largeur de cette section par le carré de sa hauteur.

886. On suspend à une tige homogène AB qui peut tourner autour du point A (fig. 28) un poids de Q kg, à la distance a cm du point A. Cette tige se trouve en équilibre sous l'action d'une force verticale P appliquée à l'extrémité libre B de la tige. Chaque centimètre de la tige pèse q kg. Déterminer la longueur x de la tige de manière que la force P soit minimum et calculer P_{min}.

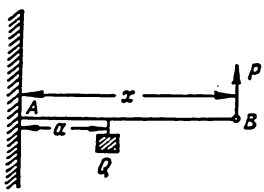


Fig. 28

887*. Les centres de trois boules A, B, C, complètement élastiques, se trouvent sur une même droite. La boule A de masse M heurte la boule B à la vitesse v, laquelle va heurter la boule C de masse m. Déterminer la masse de la boule B pour que la vitesse de la boule C soit maximum.

888. Etant données N piles électriques identiques nous pouvons former de différentes manières des batteries, en associant en série n piles, puis en parallèles les groupes ainsi obtenus $\left(\text{au nombre de } \frac{N}{n}\right)$. L'intensité de courant donnée par cette batterie est déterminée par la formule

$$I = \frac{Nn\mathcal{E}}{NR + n^2 r},$$

où $\mathcal{E}$ est la force électromotrice d'une pile, r sa résistance interne, R sa résistance extérieure.

Déterminer la valeur de n pour que cette batterie fournisse un courant maximum.

889. Déterminer le diamètre y d'une ouverture circulaire faite dans un barrage pour que le débit d'eau Q par seconde soit maximum, sachant que $Q = cy\sqrt{h-y}$, où h est la profondeur du point le plus bas de l'ouverture (h et le coefficient empirique c sont constants).

890. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les résultats de mesures également précises d'une grandeur x, la valeur la plus probable est alors celle pour laquelle la somme des carrés des erreurs

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

soit minimum (principe des moindres carrés).

Démontrer que la valeur la plus probable de la grandeur x est la moyenne arithmétique des résultats de la mesure.

§ 2. Concavité. Points d'inflexion

1°. Concavité du graphique d'une fonction. On dit que le graphique d'une courbe dérivable $y = f(x)$ tourne sa *concavité vers les y négatifs* (resp. *vers les y positifs*) dans l'intervalle ouvert (a, b) (resp. dans l'intervalle ouvert (a_1, b_1)) si pour $a < x < b$ (resp. $a_1 < x < b_1$) l'arc de courbe du graphique est situé en dessous (resp. en dessus) de la tangente au graphique de la courbe menée en un point arbitraire de l'intervalle ouvert (a, b) (resp. de l'intervalle ouvert (a_1, b_1)) (fig. 29). Une condition suffisante pour la concavité vers les y négatifs (resp. vers les y positifs) du graphique d'une fonction est que sur l'intervalle ouvert correspondant l'inégalité

$$f''(x) < 0 \qquad (f''(x) > 0)$$

soit vérifiée.

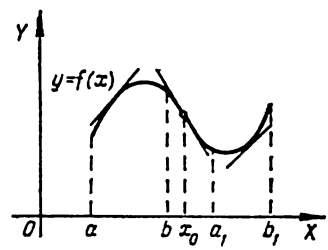


Fig. 29

Au lieu de dire que la courbe est concave vers le bas on dit encore qu'elle est *convexe vers le haut*. D'une manière analogue, une courbe concave vers le haut est également dite *convexe vers le bas*.

2°. Points d'inflexion. Un point $(x_0, f(x_0))$ en lequel la concavité de la fonction passe des y positifs aux y négatifs ou inversement s'appelle par définition *point d'inflexion* (fig. 29).

Pour l'abscisse x_0 du point d'inflexion du graphique d'une fonction $y = f(x)$, la dérivée seconde s'annule $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)$ n'existe pas. Les points en lesquels $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ n'existe pas sont appelés, par définition, *points critiques de seconde espèce*. Un point critique x_0 de seconde espèce est l'abscisse d'un point d'inflexion si $f''(x)$ conserve des signes constants mais opposés respectivement

dans les intervalles ouverts $x_0 - \delta < x < x_0$ et $x_0 < x < x_0 + \delta$ où δ est un nombre positif; ce point n'est pas un point d'inflexion si les signes de $f''(x)$ sont les mêmes dans les intervalles ouverts indiqués ci-dessus.

Exemple 1. Déterminer les intervalles de concavité et de convexité ainsi que les points d'inflexion de la courbe de Gauss

$$y = e^{-x^2}.$$

Solution. On a:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

et

$$y'' = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}.$$

En annulant la dérivée y'', on trouve les points critiques de seconde espèce

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ces points partagent l'axe numérique $-\infty < x < +\infty$ en trois intervalles ouverts: I $(-\infty, x_1)$, II (x_1, x_2) et III $(x_2, +\infty)$.

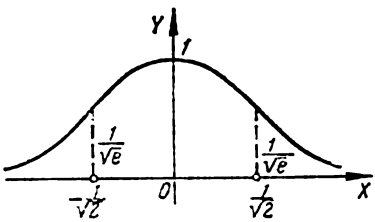


Fig. 30

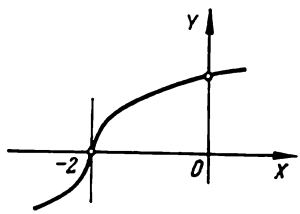


Fig. 31

Les signes de y'' seront respectivement $+, -, +$ (on peut s'en assurer en prenant, par exemple, un point dans chacun des intervalles ouverts indiqués et en substituant la valeur correspondante de x dans y''). Donc: 1) la courbe tourne sa concavité vers les y positifs pour $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$; 2) la courbe tourne sa concavité vers les y négatifs pour $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Les points $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ sont des points d'inflexion (fig. 30).

Remarquons que, vu la symétrie de la courbe de Gauss par rapport à l'axe OY, il suffit de faire l'étude du signe de la concavité dans le demi-axe $0 < x < +\infty$.

Exemple 2. Déterminer les points d'inflexion du graphique de la fonction

$$y = \sqrt[3]{x+2}.$$

Solution. On a:

$$y'' = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = 9\frac{-2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}. \qquad (1)$$

Il est évident que y'' ne s'annule jamais.

On trouve, en égalant à zéro le dénominateur de la fraction du second membre de (1), que y'' n'existe pas pour $x = -2$. Puisque $y'' > 0$ pour $x < -2$ et $y'' < 0$ pour $x > -2$, $(-2, 0)$ est un point d'inflexion (fig. 31). La tangente en ce point est parallèle à l'axe des ordonnées, puisque la dérivée première y' est infinie pour $x = -2$.

Déterminer les intervalles de concavité et les points d'inflexion des graphiques des fonctions:

891. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

892. $y = (x+1)^4$.

893. $y = \frac{1}{x+3}$.

894. $y = \frac{x^3}{x^2+12}$.

895. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

896. $y = \cos x$.

897. $y = x - \sin x$.

898. $y = x^2 \ln x$.

899. $y = \operatorname{arctg} x - x$.

900. $y = (1 + x^2)\, e^x$.

§ 3. Asymptotes

1°. Définition. Si le point (x, y) se déplace continuellement sur une courbe $y = f(x)$ de manière qu'au moins une des coordonnées de ce point tende vers l'infini et que la distance de ce point à une certaine droite tende vers zéro, on appelle alors une telle droite *asymptote* de la courbe.

2°. Asymptotes verticales. S'il existe un nombre a tel que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty,$$

la droite $x = a$ est une asymptote (*asymptote verticale* ou *parallèle à l'axe OY*).

3°. Asymptotes obliques. Si les limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1$$

existent, la droite $y = k_1 x + b_1$ sera une asymptote (*oblique à droite* ou dans le cas $k_1 = 0$ *asymptote horizontale à droite* ou *parallèle à l'axe OX*).

Si les limites

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2,$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2$$

existent, la droite $y = k_2x + b_2$ est une asymptote (*oblique à gauche* ou si $k_2 = 0$ *asymptote horizontale à gauche* ou *parallèle à l'axe OX*).

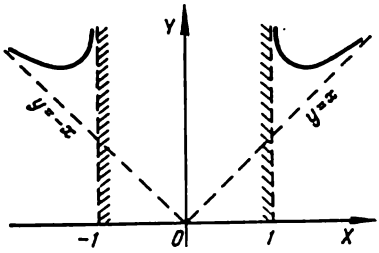


Fig. 32

Le graphique de la fonction $y = f(x)$ (la fonction est supposée univoque) ne peut avoir plus d'une asymptote à droite (oblique ou horizontale) et plus d'une asymptote à gauche (oblique ou horizontale).

Exemple 1. Trouver les asymptotes de la courbe

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Solution. En annulant le dénominateur on détermine deux asymptotes parallèles à l'axe OY:

$$x = -1 \text{ et } x = 1.$$

Déterminons les asymptotes obliques. Pour $x \to +\infty$ on trouve

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0,$$

par conséquent, la droite $y = x$ est une asymptote à droite. De même, pour $x \to -\infty$, on a

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=0.$$

Ainsi, $y = -x$ est une asymptote à gauche (fig. 32). La détermination des asymptotes se simplifie si on prend en considération la symétrie de la courbe.

Exemple 2. Trouver les asymptotes de la courbe

$$y = x + \ln x.$$

Solution. Puisque

$$\lim_{x\to+0} y = -\infty,$$

la droite $x = 0$ est une asymptote parallèle à l'axe OY (inférieure). Cherchons si la courbe possède une asymptote droite oblique (puisque $x > 0$).

On a:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = \infty.$$

Par conséquent, la courbe ne possède pas d'asymptote oblique.

Si la courbe est donnée par des équations paramétriques $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, on étudie d'abord s'il existe des valeurs de t pour lesquelles une des fonctions $\varphi(t)$ ou $\psi(t)$ devient infinie, l'autre étant finie. Si $\varphi(t_0) = \infty$ et $\psi(t_0) = c$, la courbe possède une asymptote parallèle à l'axe OX (ou horizontale) $y = c$. Si $\psi(t_0) = \infty$ et $\varphi(t_0) = c$, la courbe possède une asymptote parallèle à l'axe OY (ou verticale) $x = c$.

Si $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \infty$ et si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k,$$

$$\lim_{t \to t_0} [\psi(t) - k\varphi(t)] = b,$$

la courbe possède une asymptote oblique $y = kx + b$.

Si la courbe est donnée par une équation polaire $r = f(\varphi)$, on peut trouver ses asymptotes d'après la règle précédente en ramenant l'équation de la courbe à des équations paramétriques grâce aux formules $x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi$.

Déterminer les asymptotes des courbes:

901. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$.

902. $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

903. $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

904. $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$.

905. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

906. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

907. $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

908. $y = x - 2 + \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

909. $y = e^{-x^2} + 2$.

910. $y = \frac{1}{1 - e^x}$.

911. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

912. $y = \frac{\sin x}{x}$.

913. $y = \ln(1 + x)$.

914. $x = t$; $y = t + 2 \operatorname{arctg} t$.

915. Trouver l'asymptote de la spirale hyperbolique $r = \frac{a}{\varphi}$.

§ 4. Construction des graphiques des fonctions d'après leurs points caractéristiques

Quand on veut construire le graphique d'une fonction, il faut, avant tout, déterminer le domaine de définition de cette fonction ainsi que le comportement de la fonction à la frontière de son domaine de définition. Il est également utile de noter préalablement certains éléments particuliers de la fonction (s'ils existent) comme par exemple: symétrie, périodicité, constance du signe, monotonie, etc.

Ensuite, il faut déterminer les points de discontinuité, les points d'extrémum de la fonction, les points d'inflexion, les asymptotes, etc. Ces éléments ainsi déterminés permettent de déceler le caractère général du graphique de la fonction et obtenir ainsi une image mathématiquement juste de la courbe.

Exemple 1. Construire le graphique de la fonction

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Solution. a) La fonction existe partout, excepté aux points $x=\pm 1$.

La fonction est impaire, donc le graphique de la fonction est symétrique par rapport au point O (0; 0). Cette remarque simplifiera la construction du graphique.

b) Les points de discontinuité sont $x=-1$ et $x=1$, de plus, $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} y=\mp\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} y=\mp\infty$; par conséquent, les droites $x=\pm 1$ sont des asymptotes parallèles à l'axe Oy du graphique.

c) Déterminons les asymptotes obliques. On a

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty} y=\infty,$$

par conséquent, il n'y a pas d'asymptote à droite. D'après la symétrie du graphique, il découle que le graphique ne possède pas d'asymptote à gauche.

d) Déterminons les points critiques de première et de seconde espèces, c'est-à-dire les points en lesquels la dérivée première ou la dérivée seconde de la fonction donnée s'annulent ou n'existent pas.

On a

$$y'=\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}, \tag{1}$$

$$y''=\frac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}. \tag{2}$$

Les dérivées y' et y'' n'existent pas pour $x=\pm 1$, c'est-à-dire seulement aux points où la fonction y elle-même n'existe pas. Donc les points critiques sont les points où y' et y'' s'annulent.

Il découle de (1) et de (2) que

$$y'=0 \text{ pour } x=\pm\sqrt{3},$$

$$y''=0 \text{ pour } x=0 \text{ et } x=\pm 3.$$

Ainsi, y' conserve un signe constant dans chacun des intervalles ouverts $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}, +\infty)$ et y'' dans chacun des intervalles ouverts $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ et $(3, +\infty)$.

Pour déterminer le signe de y' (ou celui de y'') dans chacun des intervalles ouverts indiqués, il suffit de déterminer le signe de y' ou de y'') en un point quelconque de chacun de ces intervalles ouverts.

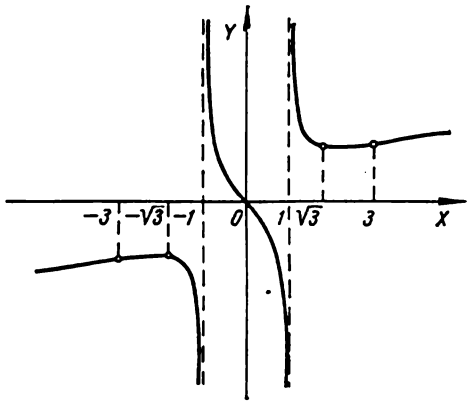


Fig. 33

Il est commode de rassembler tous les résultats de l'étude en un tableau (tableau I) et de calculer les ordonnées des points caractéristiques du graphique de la fonction. Du fait que la fonction y est impaire, remarquons qu'il suffit de faire les calculs seulement pour $x \geqslant 0$; on complète la partie du graphique correspondant aux x négatifs par symétrie par rapport à l'origine.

e) En s'aidant des résultats obtenus, construisons le graphique de la fonction (fig. 33).

Exemple 2. Construire le graphique de la fonction

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Solution. a) Le domaine d'existence de la fonction est $0 < x < \infty$. b) Il n'y a pas de points de discontinuité dans le domaine d'existence mais quand on s'approche d'un point frontière ($x = 0$) du domaine d'existence, on a:

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Par conséquent, la droite $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote parallèle à l'axe OY.

Tableau I

x	0	(0, 1)	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	0	—	$\pm\infty$	+	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37$	+	1,5	+
y'	—	—	n'existe pas	—	0	+	+	+
y''	0	—	n'existe pas	+	+	+	0	—
Conclusions	Point d'inflexion	La fonction décroît; le graphique tourne sa convexité vers le haut	Point de discontinuité	La fonction décroît; le graphique tourne sa convexité vers le bas	Point de minimum	La fonction croît; le graphique tourne sa convexité vers le bas	Point d'inflexion	La fonction croît; le graphique tourne sa convexité vers le haut

c) Déterminons l'asymptote à droite (il n'y a pas d'asymptote à gauche puisque x ne peut tendre vers $-\infty$):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

L'axe des abscisses est l'asymptote à droite: $y = 0$.

d) Déterminons les points critiques. On a:

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3};$$

y' et y'' existent en chaque point du domaine d'existence de la fonction donnée et

$$y' = 0 \text{ pour } \ln x = 1, \text{ c'est-à-dire pour } x = e;$$

$$y'' = 0 \text{ pour } \ln x = \frac{3}{2}, \text{ c'est-à-dire pour } x = e^{3/2}.$$

Rassemblons tous ces résultats ainsi que les points caractéristiques en un tableau (tableau II).

De plus, outre les points caractéristiques trouvés, il est aussi utile de déterminer les points d'intersection du graphique avec les

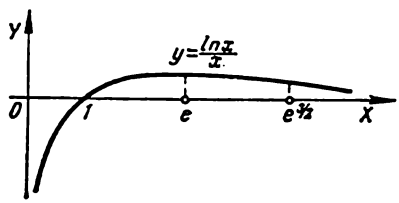


Fig. 34

axes de coordonnées. En faisant $y = 0$, on trouve $x = 1$ (point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses); le graphique ne coupe pas l'axe des ordonnées.

e) En s'aidant des résultats obtenus, construisons le graphique de la fonction (fig. 34).

Construire les graphiques des fonctions données ci-dessous en déterminant pour chaque fonction son domaine d'existence, les points de discontinuité, les points d'extrémum, les intervalles de croissance et de décroissance, les points d'inflexion, la convexité ainsi que les asymptotes.

Tableau II

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, e)$	$e \approx 2{,}72$	$(e, e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}49$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}37$	$+$	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx 0{,}33$	
y'	n'existe pas	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	n'existe pas	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Conclusions	Point frontière du domaine de définition de la fonction. Asymptote verticale	La fonction est croissante; le graphique tourne sa convexité vers le haut	La fonction est croissante; le graphique tourne sa convexité vers le haut	La fonction est croissante; le graphique tourne sa convexité vers le haut	Point de maximum pour la fonction	La fonction est décroissante; le graphique tourne sa convexité vers le haut	Point d'inflexion	La fonction est décroissante; le graphique tourne sa convexité vers le bas

916. $y = x^3 - 3x^2$.

917. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$.

918. $y = (x-1)^2(x+2)$.

919. $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$.

920. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$.

921. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

922. $y = \frac{x^4-3}{x}$.

923. $y = \frac{x^4+3}{x}$.

924. $y = x^3 + \frac{2}{x}$.

925. $y = \frac{1}{x^2+3}$.

926. $y = \frac{8}{x^2-4}$.

927. $y = \frac{4x}{4+x^2}$.

928. $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$.

929. $y = \frac{x}{x^2-4}$.

930. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$.

931. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.

932. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

933. $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$.

934. $y = x\sqrt{x+3}$.

935. $y = \sqrt{x^3-3x}$.

936. $y = \sqrt[3]{1-x^2}$.

937. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

938. $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

939. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

940. $y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

941. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

942. $y = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.

943. $y = \frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$.

944. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

945. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

946. $y = xe^{-x}$.

947. $y = \left(a + \frac{x^2}{a}\right) e^{\frac{x}{a}}$.

948. $y = e^{8x-x^2-14}$.

949. $y = (2+x^2)e^{-x^2}$.

950. $y = 2|x| - x^2$.

951. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

952. $y = \frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{2}$.

953. $y = \frac{x}{\ln x}$.

954. $y = (x+1)\ln^2(x+1)$.

955. $y = \ln(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}$.

956. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

957. $y = \ln(1+e^{-x})$.

958. $y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

959. $y = \sin x + \cos x$.

960. $y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$.

961. $y = \cos x - \cos^2 x$.

962. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

963. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.

964. $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

965. $y = \sin x \cdot \sin 2x$.

966. $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

967. $y = x + \sin x$.

968. $y = \arcsin\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$.

969. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

970. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

971. $y = x \operatorname{arctg} x$.

972. $y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $y = 0$ pour $x = 0$.

973. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

974. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.

975. $y = \ln \operatorname{sh} x$.

976. $y = \operatorname{Arch}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

977. $y = e^{\sin x}$.

978. $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$.

979. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

980. $y = \ln \sin x$.

981. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

982. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

983. $y = \cos x - \ln \cos x$.

984. $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

985. $y = \arcsin \ln(x^3 + 1)$.

986. $y = x^x$.

987. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

On recommande également de construire les graphiques des fonctions données dans les exercices n°s 826-848.

Construire les graphiques des fonctions données sous forme paramétrique.

988. $x = t^2 - 2t$, $\quad y = t^2 + 2t$.

989. $x = a \cos^3 t$, $\quad y = a \sin t \quad (a > 0)$.

990. $x = te^t$, $\quad y = te^{-t}$.

991. $x = t + e^{-t}$, $\quad y = 2t + e^{-2t}$.

992. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $\quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0)$.

§ 5. Différentielle d'un arc de courbe. Courbure

1°. Différentielle d'un arc de courbe. La différentielle de l'arc s d'une courbe plane donnée par une équation dans un système de coordonnées cartésiennes x et y est donnée par la formule

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2};$$

de plus, si l'équation de la courbe est de la forme :

a) $y = f(x)$, alors $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$;

b) $x = f_1(y)$, alors $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$;

c) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, alors $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$;

d) $F(x, y) = 0$, alors $ds = \frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}{|F'_y|}\, dx = \frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}{|F'_x|}\, dy$.

En désignant par α l'angle formé par la tangente (dirigée dans le sens des arcs de courbe s croissants) et la direction positive de l'axe OX, on trouve :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

En coordonnées polaires, on a :

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

En désignant par β l'angle formé par le rayon vecteur d'un point de la courbe et de la tangente à la courbe en ce point, on a :

$$\cos\beta = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin\beta = r\frac{d\varphi}{ds}.$$

2°. Courbure d'une courbe. On appelle *courbure* K en un point M d'une courbe la limite du rapport de l'angle formé par les directions positives des tangentes aux points M et N de la courbe (*angle de contingence*) et la longueur de l'arc $\widehat{MN} = \Delta s$ lorsque $N \to M$ (fig. 35), c'est-à-dire

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

où α est l'angle formé par la direction positive de la tangente au point M et l'axe OX.

On appelle *rayon de courbure* R l'inverse de la valeur absolue de la courbure, c'est-à-dire

$$R=\frac{1}{|K|}.$$

Les courbes à courbure constante sont des cercles $\left(K=\frac{1}{a}\right.$, où a est le rayon du cercle$\left.\right)$ et des droites ($K = 0$).

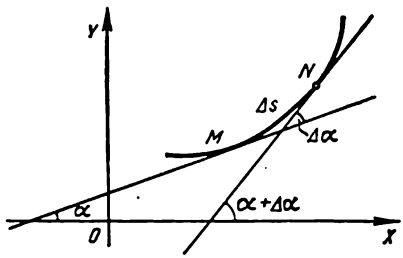


Fig. 35

Les formules permettant de calculer la courbure d'une courbe donnée dans un système de coordonnées rectangulaires sont les suivantes (au signe près):

1) si la courbe est donnée par une équation explicite $y = f(x)$,

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

2) si la courbe est donnée par une équation implicite $F(x, y) = 0$,

$$K=\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}};$$

3) si la courbe est donnée par des équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,

$$K=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

où

$$x'=\frac{dx}{dt}, \quad y'=\frac{dy}{dt}, \quad x''=\frac{d^2x}{dt^2}, \quad y''=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

En coordonnées polaires, lorsque la courbe est donnée par une équation de la forme $r = f(\varphi)$, on a

$$K=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}},$$

où

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \quad \text{et} \quad r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

3°. Cercle de courbure. On appelle *cercle de courbure* (ou *cercle d'osculation*) au point M d'une courbe la position limite du cercle mené par le point M et deux autres points P et Q de la courbe lorsque $P \to M$ et $Q \to M$.

Le rayon du cercle de courbure est égal au rayon de courbure et le centre du cercle de courbure (*centre de courbure*) se trouve sur la normale dirigée dans le sens de la concavité de la courbe au point M.

Les coordonnées X et Y du centre de courbure de la courbe sont données par les formules:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

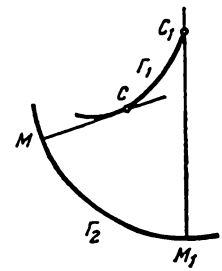


Fig. 36

Le lieu géométrique des centres de courbure s'appelle la *développée*.

Si dans les formules qui donnent les coordonnées du centre de courbure on considère X et Y comme les coordonnées courantes d'un point de la développée, ces formules donnent alors les équations paramétriques de la développée où x et y (ou t, si la courbe est donnée par des équations paramétriques) sont des paramètres.

Exemple 1. Déterminer l'équation de la développée de la parabole $y = x^2$.

Solution. $X = -4x^3$, $Y = \frac{1+6x^2}{2}$. En éliminant le paramètre x, on trouve l'équation de la développée sous forme explicite $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$.

On appelle *développante* d'une courbe une courbe dont la développée est la courbe donnée. La normale MC de la développante Γ_2 est la tangente à la développée Γ_1; la longueur de l'arc $\widehat{CC_1}$ de la développée est égale à l'accroissement du rayon de courbure correspondant $\widehat{CC_1} = M_1C_1 - MC$; aussi la développante Γ_2 s'obtient-elle en déroulant un fil tendu enroulé sur Γ_1 (fig. 36). Chaque développée possède une infinité de développantes correspondant à différentes longueurs initiales du fil.

4°. Sommets d'une courbe. Par définition, on appelle *sommets* d'une courbe les points de la courbe en lesquels la courbure est maximum ou minimum. Pour déterminer les sommets d'une courbe, on forme l'expression de la courbure K et on détermine ses points d'extrémum. On peut prendre le rayon de courbure $R = \frac{1}{|K|}$ au lieu de la courbure K et déterminer ses points d'extrémum si cela simplifie les calculs.

Exemple 2. Trouver le sommet de la chaînette

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \ (a > 0).$$

Solution. Puisque $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ et $y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $K = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}$ et, par conséquent, $R = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$. On a $\frac{dR}{dx} = \operatorname{sh} 2 \frac{x}{a}$. En annulant la dérivée, on trouve $\operatorname{sh} 2 \frac{x}{a} = 0$, d'où on détermine l'unique point critique $x = 0$. En calculant la dérivée seconde $\frac{d^2R}{dx^2}$ et en substituant $x = 0$, on trouve $\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{2}{a} \operatorname{ch} 2 \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = \frac{2}{a} > 0$. Par conséquent, $x = 0$ est un point de minimum du rayon de courbure (ou un maximum de la courbure) de la chaînette. Ainsi, le sommet de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ est le point $A(0, a)$.

Calculer la différentielle de l'arc de courbe ainsi que le cosinus et le sinus de l'angle formé par la direction positive de l'axe OX et la tangente pour chacune des courbes suivantes:

993. $x^2 + y^2 = a^2$ (cercle).

994. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse).

995. $y^2 = 2px$ (parabole).

996. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (astroïde).

997. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (chaînette).

998. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (cycloïde).

999. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (astroïde).

Calculer la différentielle de l'arc de courbe ainsi que le cosinus et le sinus de l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente pour chacune des courbes suivantes:

1000. $r = a\varphi$ (spirale d'Archimède).

1001. $r = a/\varphi$ (spirale hyperbolique).

1002. $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (parabole).

1003. $r = a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ (cardioïde).

1004. $r = a^{\varphi}$ (spirale logarithmique).

1005. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (lemniscate).

Calculer la courbure des courbes données aux points indiqués:

1006. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ à l'origine des coordonnées.

1007. $x^2 + xy + y^2 = 3$ au point $(1, 1)$.

1008. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aux sommets $A(a; 0)$ et $B(0; b)$.

1009. $x = t^2$, $y = t^3$ au point $(1, 1)$.

1010. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ aux sommets $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$.

1011. Déterminer le point de la parabole $y^2 = 8x$ en lequel la courbure est égale à 0,128.

1012. Déterminer le sommet de la courbe $y = e^x$.

Calculer les rayons de courbure (au point courant) des courbes données:

1013. $y = x^3$ (parabole cubique).

1014. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse).

1015. $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$.

1016. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (astroïde).

1017. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ (développante du cercle).

1018. $r = ae^{k\varphi}$ (spirale logarithmique).

1019. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioïde).

1020. Calculer la plus petite valeur du rayon de courbure de la parabole $y^2 = 2px$.

1021. Montrer que le rayon de courbure de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ est égal au segment de normale.

Calculer les coordonnées du centre de courbure des courbes données aux points indiqués:

1022. $xy = 1$ au point $(1, 1)$.

1023. $ay^2 = x^3$ au point (a, a).

Former l'équation du cercle de courbure des courbes données aux points indiqués:

1024. $y = x^2 - 6x + 10$ au point $(3, 1)$.

1025. $y = e^x$ au point $(0, 1)$.

Déterminer les développées des courbes:

1026. $y^2 = 2px$ (parabole).

1027. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse).

1028. Démontrer que la développée de la cycloïde

$$x = a\,(t - \sin t), \qquad y = a\,(1 - \cos t)$$

est une cycloïde déplacée parallèlement.

1029. Démontrer que la développée de la spirale logarithmique

$$r = ae^{h\varphi}$$

est aussi une spirale logarithmique de même pôle.

1030. Démontrer que la courbe (*développante du cercle*)

$$x = a\,(\cos t + t \sin t), \qquad y = a\,(\sin t - t \cos t)$$

est la développante du cercle $x = a \cos t$; $y = a \sin t$.

CHAPITRE IV

INTÉGRALE INDÉFINIE

§ 1. Intégration directe

1°. Principales règles d'intégration.

1) Si $F'(x)=f(x)$, alors

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

où C est une constante arbitraire.

2) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx$, où A est une constante.

3) $\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx.$

4) Si $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ et $u=\varphi(x)$, alors

$$\int f(u)\,du=F(u)+C.$$

En particulier,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a\neq 0).$$

2°. Table d'intègrales types.

I. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad n\neq -1.$

II. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$

III. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C \ (a\neq 0).$

IV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq 0).$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq 0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \quad (a\neq 0).$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C \ (a>0).$

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (a>0)\,;\ \int e^x\,dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

XIV. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

XV. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XVII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Exemple 1. $\int (ax^2+bx+c)\,dx = \int ax^2\,dx + \int bx\,dx +$

$$+\int c\,dx = a\int x^2\,dx + b\int x\,dx + c\int dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C.$$

Calculer les intégrales suivantes à l'aide des règles 1), 2), 3) et les formules d'intégration:

1031. $\int 5a^2x^6\,dx.$

1032. $\int (6x^2+8x+3)\,dx.$

1033. $\int x(x+a)(x+b)\,dx.$

1034. $\int (a+bx^3)^2\,dx.$

1035. $\int \sqrt{2px}\,dx.$

1036. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

1037. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx.$

1038. $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\,dx.$

1039. $\int (\sqrt{x}+1)\times$
$\times(x-\sqrt{x}+1)\,dx.$

1040. $\int \frac{(x^3+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

1041. $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

1042. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,dx.$

1043. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$

1044. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$

1045. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

1046. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$

1047. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx.$

1048*. a) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx;$

b) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

1049. a) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx;$

b) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

1050. $\int 3^x e^x\,dx.$

3°. Intégration par introduction sous le signe de différentiation. La règle 4) élargit dans une bonne mesure la table des intégrales types. En effet, grâce à cette règle, la table des intégrales reste valable indépendamment de ce que la variable d'intégration est une variable indépendante ou une fonction différentiable.

Exemple 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\,d(5x-2)=$

$$=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}\,\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C,$$

où l'on a posé $u = 5x - 2$. On a utilisé la règle 4) et l'intégrale type I.

Exemple 3.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C.$$

On suppose implicitement que $u = x^2$ et on se sert de la règle 4) et de l'intégrale type V.

Exemple 4. $\int x^2 e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}\,d(x^3)=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

en vertu de la règle 4) et de l'intégrale type VII.

Dans les exemples 2, 3, 4 avant d'appliquer l'une quelconque des intégrales types, nous avons ramené l'intégrale donnée à la forme

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad \text{où} \quad u = \varphi(x).$$

Toute transformation de ce genre s'appelle *introduction sous le signe de différentiation.*

Il est utile de remarquer qu'on se sert fréquemment des transformations de différentielles, utilisées en particulier dans les exercices 2 et 3:

a) $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b) \quad (a \neq 0)$; b) $x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$, etc.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide des principales règles et des formules d'intégration:

1051.** $\int \frac{a\,dx}{a-x}$.

1052.** $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$.

1053. $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx$.

1054. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}$.

1055. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\,dx$.

1056. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

1057. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx$.

1058. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$.

1059. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx$.

1060*. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$.

1061. $\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}$.

1062. $\int \sqrt{a-bx}\,dx$.

1063*. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1064. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx$.

1065. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

1066. $\int \frac{dx}{7x^2-8}$.

1067. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$.

1068. $\int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx$.

1069. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2}\,dx$.

1070. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,dx$.

1071. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

1072. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

1073. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}\,dx$.

1074. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx$.

1075. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx$.

1076. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$

1077. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}.$

1078. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}.$

1079. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\,dx.$

1080. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$

1081. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$

1082. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}.$

1083. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx.$

1084. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx.$

1085. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

1086. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$

1087. $\int ae^{-mx}\,dx.$

1088. $\int 4^{2-3x}\,dx.$

1089. $\int (e^t-e^{-t})\,dt.$

1090. $\int (e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2\,dx.$

1091. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx.$

1092. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}\,dx.$

1093. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx.$

1094. $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$

1095. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

1096. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1097. $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx.$

1098. $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx.$

1099. $\int (e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{x}{a}}dx.$

1100*. $\int \frac{dx}{2^x+3}.$

1101. $\int \frac{a^x\,dx}{1+a^{2x}}.$

1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}}\,dx.$

1103. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}.$

1104. $\int \sin(a+bx)\,dx.$

1105. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\,dx.$

1106. $\int (\cos ax+\sin ax)^2\,dx.$

1107. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

1108. $\int \sin(\lg x)\,\frac{dx}{x}.$

1109*. $\int \sin^2 x\,dx.$

1110*. $\int \cos^2 x\,dx.$

1111. $\int \sec^2(ax+b)\,dx.$

1112. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx.$

1113. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}.$

1114. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

1115. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}$.

1116. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$.

1117. $\int x\sin(1-x^2)\,dx$.

1118. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}}-1\right)^2 dx$.

1119. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

1120. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1121. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{a-b}\,dx$.

1122. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}$.

1123. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1124. $\int x\operatorname{ctg}(x^2+1)\,dx$.

1125. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

1126. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}\,dx$.

1127. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$.

1128. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$.

1129. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$.

1130. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\,dx$.

1131. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x\,dx$.

1132. $\int \operatorname{tg}^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx$.

1133. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

1134. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\,dx$.

1135. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}\,dx$.

1136. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}\,dx$.

1137. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\operatorname{ctg} 3x}\,dx$.

1138. $\int (2\operatorname{sh} 5x-3\operatorname{ch} 5x)\,dx$.

1139. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

1140. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

1141. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1142. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}$.

1143. $\int \operatorname{th} x\,dx$.

1144. $\int \operatorname{cth} x\,dx$.

Calculer les intégrales indéfinies :

1145. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$.

1146. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx$.

1147. $\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx$.

1148. $\int xe^{-x^2}\,dx$.

1149. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx$.

1150. $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$.

1151. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$.

1152. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx$.

1153. $\int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x}\,dx$.

1154. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1155. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}}\,dx$.

1156. $\int \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$.

1157. $\int a^{\sin x}\cos x\,dx$.

1158. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx$.

1159. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

1160. $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx$.

1161. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$.

1162. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$.

1163. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}$.

1164. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$.

1165. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

1166. $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$.

1167. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x + x\ln(1+x^2)+1}}{1+x^2}\,dx$.

1168. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$.

1169. $\int \frac{\left(1-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$.

1170. $\int \frac{x^2}{x^2-2}\,dx$.

1171. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$.

1172. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$.

1173. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$.

1174. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1175. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$.

1176. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx$.

1177. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$.

1178. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)dt$.

1179. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$.

1180. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

1181. $\int e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$.

1182. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\,dx$.

1183. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

1184. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1185. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}\,dx.$

1186. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx.$

1187. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$

1188. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\,dx.$

1189. $\int x^2 \operatorname{ch}(x^3+3)\,dx.$

1190. $\int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx.$

§ 2. Méthode de substitutions

1°. Changement de variable dans une intégrale indéfinie. En posant

$$x = \varphi(t)$$

où t est une nouvelle variable et φ une fonction continue dérivable, on a:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

On tâche de choisir la fonction φ de manière que le second membre de la formule (1) ait une forme commode pour l'intégration.

Exemple 1. Calculer

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Solution. Il est naturel de poser $t = \sqrt{x-1}$, d'où $x = t^2 + 1$ et $dx = 2t\,dt$. Par conséquent,

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+t^2)\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Parfois on a recours à une substitution de la forme

$$u = \varphi(x).$$

Supposons qu'on a su ramener l'expression sous le signe d'intégration $f(x)\,dx$ à la forme

$$f(x)\,dx = g(u)\,du, \text{ où } u = \varphi(x).$$

Si $\int g(u)\,du$ est connu, c'est-à-dire

$$\int g(u)\,du = F(u) + C,$$

alors,

$$\int f(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

A vrai dire, nous sommes déjà servis de cette méthode au § 1, 3°.

Les exemples 2, 3, 4 (§ 1) auraient pu être intégrés de la manière suivante:

Exemple 2. $u = 5x - 2$; $du = 5\,dx$, $dx = \frac{1}{5}\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

Exemple 3. $u = x^2$; $du = 2x\,dx$; $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$$

Exemple 4. $u = x^3$; $du = 3x^2\,dx$; $x^2\,dx = \frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2°. Substitutions trigonométriques.

1) Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, on pose en général $x = a \sin t$, d'où

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

2) Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, on pose alors $x = a \sec t$, d'où

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3) Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, on pose alors $x = a \operatorname{tg} t$, d'où

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t.$$

Remarquons que les substitutions trigonométriques ne sont pas toujours avantageuses.

Parfois, au lieu d'employer les substitutions trigonométriques, il est plus commode d'avoir recours aux *substitutions hyperboliques* qui possèdent des propriétés semblables (voir l'exemple 1209).

Voir en détail les substitutions trigonométriques et hyperboliques au § 9.

Exemple 5. Calculer

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

Solution. Posons $x = \operatorname{tg} t$. Par conséquent, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}{\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\sec t \cos^2 t}{\sin^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 t \cos t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t}\,dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} t + \sec t| - \frac{1}{\sin t} + C = \ln|\operatorname{tg} t + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}| -$$

$$- \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg} t} + C = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

1191. Calculer les intégrales en utilisant le changement de variable indiqué:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x = \frac{1}{t}$;

b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $x = -\ln t$;

c) $\int x(5x^2-3)^7\,dx$, $5x^2-3 = t$;

d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$, $t = \sqrt{x+1}$;

e) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $t = \sin x$.

Calculer les intégrales à l'aide d'un changement de variables adéquat:

1192. $\int x(2x+5)^{10}\,dx$.

1193. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

1194. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

1195. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

1196. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\,\frac{dx}{x}$.

1197. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1198. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.

1199. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$.

1200*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Calculer les intégrales en utilisant les substitutions trigonométriques:

1201. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1202. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$.

1204*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1205. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

1206*. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

1207. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1208. Calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

à l'aide du changement de variable $x=\sin^2 t$.

1209. Calculer

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

en employant le changement de variable hyperbolique $x=a\,\mathrm{sh}\,t$.

Solution. On a: $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{sh}^2 t}=a\,\mathrm{ch}\,t$ et $dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$,
d'où

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\int a\,\mathrm{ch}\,t\cdot a\,\mathrm{ch}\,t\,dt=$$

$$=a^2\int \mathrm{ch}^2 t\,dt=a^2\int \frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2t+t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t+t)+C.$$

Puisque

$$\mathrm{sh}\,t=\frac{x}{a},\quad \mathrm{ch}\,t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

et

$$e^t=\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

on trouve finalement:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C_1,$$

où $C_1=C-\frac{a^2}{2}\ln a$ est une nouvelle constante arbitraire.

1210. Calculer

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx,$$

en posant $x = a \operatorname{ch} t$.

§ 3. Intégration par parties

Formule d'intégration par parties. Si $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ sont des fonctions dérivables, on a

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Exemple 1. Calculer

$$\int x \ln x\,dx.$$

En posant $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, on a $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. D'où

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Pour ramener une intégrale donnée à une intégrale type, on doit parfois appliquer plusieurs fois la formule d'intégration par parties. Dans certains cas, à l'aide d'intégration par parties, on obtient des équations dont on déduit l'intégrale cherchée.

Exemple 2. Calculer

$$I = \int e^x \cos x\,dx.$$

On a

$$I = \int e^x \cos x\,dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx =$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Par conséquent,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx,$$

d'où

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Calculer les intégrales suivantes en appliquant la formule d'intégration par parties:

1211. $\int \ln x\,dx.$

1212. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

1213. $\int \arcsin x\,dx.$

1214. $\int x \sin x\,dx.$

1215. $\int x \cos 3x\,dx.$

1216. $\int \frac{x}{e^x}\,dx.$

1217. $\int x \cdot 2^{-x}\,dx.$

1218**. $\int x^2 e^{3x}\,dx.$

1219*. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx.$

1220*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$

1221. $\int x \sin x \cos x\,dx.$

1222*. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$

1223. $\int x^2 \ln x\,dx.$

1224. $\int \ln^2 x\,dx.$

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$

1226. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

1227. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

1228. $\int x \arcsin x\,dx.$

1229. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

1230. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$

1231. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

1232. $\int e^x \sin x\,dx.$

1233. $\int 3^x \cos x\,dx.$

1234. $\int e^{ax} \sin bx\,dx.$

1235. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

Calculer les intégrales à l'aide des différentes méthodes:

1236. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$

1237. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

1238. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx.$

1239. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x}\,dx.$

1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$

1241. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$

1242. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx.$

1243. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

1244. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

1245. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

1246. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

1247. $\int x \operatorname{tg}^2 2x\,dx.$

1248. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$

1249. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$

1250**. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

1251*. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$

1252*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1253*. $\int \sqrt{A+x^2}\,dx.$

1254*. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

§ 4. Intégrales simples contenant un trinôme du second degré

1°. Intégrales du type $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$. La méthode générale de calcul consiste à ramener le trinôme du second degré à la forme:

$$ax^2+bx+c=a(x+k)^2+l, \tag{1}$$

où k et l sont des constantes. Pour accomplir la transformation (1), il est commode de faire ressortir un carré entier du trinôme du second degré. On peut également user de la substitution

$$2ax+b=t.$$

Si $m=0$, en mettant le trinôme du second degré sous la forme (1), on se ramène à l'une des intégrales types III ou IV (voir table).

Exemple 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C.$$

Si $m\neq 0$, on fait apparaître au numérateur la dérivée $2ax+b$ du trinôme du second degré

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx=\int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx=$$

$$=\frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

et ainsi on se ramène à l'intégrale étudiée précédemment.

Exemple 2.

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C.$$

2°. Intégrales du type $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

Les méthodes de calcul sont analogues à celles développées précédemment. Cette intégrale se ramène à l'intégrale type V, si $a>0$, et à l'intégrale type VI, si $a<0$.

Exemple 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

Exemple 4.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx+2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

3°. Intégrales du type $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. A l'aide du changement de variable

$$\frac{1}{mx+n}=t,$$

ces intégrales se ramènent aux intégrales du type 2°.

Exemple 5. Calculer

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Solution. Posons

$$x+1=\frac{1}{t},$$

d'où

$$dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

On a :

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C.$$

4°. Intégrales du type $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. En faisant apparaître dans le trinôme du second degré un carré complet, l'intégrale donnée se ramène à l'une des deux formes principales suivantes (voir exemples 1252 et 1253):

$$1)\quad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$(a>0);$$

$$2)\quad \int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left| x+\sqrt{x^2+A} \right| + C.$$

Exemple 6.

$$\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{2-(1+x)^2}\,d(1+x) =$$

$$= \frac{1+x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}} + C.$$

Calculer les intégrales :

1255. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

1256. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

1257. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$.

1258. $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$.

1259. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

1260. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$.

1261. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$.

1262. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

1263. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

1264. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

1265. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx.$

1266. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$

1267. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx.$

1268. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

1269. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx.$

1270. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

1271. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$

1272. $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx.$

1273. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$

1274. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx.$

1275. $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}.$

1276. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}\,dx.$

1277. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$

1278. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}.$

1279. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$

§ 5. Intégration des fonctions rationnelles

1°. Méthode des coefficients indéterminés. L'intégration d'une fonction rationnelle, après avoir fait apparaître sa partie entière, se ramène à l'intégration d'une *fraction rationnelle régulière* irréductible

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, le degré du numérateur $P(x)$ étant inférieur au degré du dénominateur $Q(x)$.

Si

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \ldots (x-l)^{\lambda}$$

où $a, \ldots, l$ sont les racines réelles différentes du polynôme $Q(x)$ et $\alpha, \ldots, \lambda$ des nombres entiers (multiplicités des racines). On a alors la décomposition de la fraction (1) en éléments simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}. \tag{2}$$

Pour calculer les coefficients indéterminés $A_1, A_2, \ldots,$ on réduit au même dénominateur les deux membres de l'identité (2), puis on égalise les coefficients des mêmes puissances de la variable x (première méthode). On peut également déterminer ces coefficients en donnant dans l'égalité (2) ou dans une égalité équivalente à x une valeur convenablement choisie (deuxième méthode).

Exemple 1. Calculer

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = I.$$

Solution. On a

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

D'où

$$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \qquad (3)$$

a) Première méthode de détermination des coefficients. Transcrivons l'identité (3) sous la forme

$$x \equiv (A + B_1)x^2 + (2A + B_2)x + (A - B_1 - B_2).$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve:

$$0 = A + B_1; \quad 1 = 2A + B_2; \quad 0 = A - B_1 - B_2.$$

D'où

$$A = \frac{1}{4}; \qquad B_1 = -\frac{1}{4}; \qquad B_2 = \frac{1}{2}.$$

b) Deuxième méthode de détermination des coefficients. En faisant $x = 1$ dans l'identité (3) on a:

$$1 = A \cdot 4, \text{ c'est-à-dire } A = \frac{1}{4}.$$

En faisant $x = -1$, on trouve

$$-1 = -B_2 \cdot 2, \text{ c'est-à-dire } B_2 = \frac{1}{2}.$$

En faisant $x = 0$, on trouve

$$0 = A - B_1 - B_2,$$

c'est-à-dire $B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}$.

Par conséquent,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Exemple 2. Calculer

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = I.$$

Solution. On a

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

et

$$I = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \qquad (4)$$

Pour intégrer cette intégrale, on recommande de combiner les deux méthodes de détermination des coefficients. En appliquant la deuxième méthode, faisons $x = 0$ dans l'identité (4). On trouve $1 = A$. Puis faisons $x = 1$, on trouve $1 = C$. Ensuite, en appliquant la première méthode, nous égalons dans l'identité (4) les coefficients de x^2. On trouve:

$$0 = A + B, \text{ c'est-à-dire } B = -1.$$

Ainsi,

$$A = 1,\ B = -1 \text{ et } C = 1.$$

Par conséquent,

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Si le polynôme $Q(x)$ a des racines complexes $a \pm ib$ de multiplicité k, alors à la décomposition (2) participent des éléments simples du type:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}, \tag{5}$$

où

$$x^2 + px + q = [x - (a - ib)]\,[x - (a - ib)]$$

et $A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ sont des coefficients indéterminés que l'on déterminera à l'aide de l'une des méthodes indiquées précédemment. Pour $k = 1$ la fraction (5) s'intègre immédiatement; pour $k > 1$, on applique la *méthode de réduction*; on recommande de mettre préalablement le trinôme du second degré x^2+px+q sous la forme: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ et de faire le changement de variable $x+\frac{p}{2}=z$.

Exemple 3. Calculer

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = I.$$

Solution. Puisque

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

alors, en posant $x+2=z$, on trouve:

$$I = \int \frac{z-1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} - \int \frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \int \frac{dz}{z^2+1} + \int z\,d\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right] = -\frac{1}{2(z^2+1)} -$$

$$-\operatorname{arctg} z - \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z = -\frac{z+1}{2(z^2+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

2°. Méthode d'Ostrogradsky. Si $Q(x)$ a des racines multiples, alors

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx \tag{6}$$

où $Q_1(x)$ est le plus grand commun diviseur du polynôme $Q(x)$ et de sa dérivée $Q'(x)$;

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x);$$

$X(x)$ et $Y(x)$ sont des polynômes à coefficients indéterminés, dont les degrés sont respectivement inférieurs d'une unité au degré de $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.

On calcule les coefficients indéterminés des polynômes $X(x)$ et $Y(x)$ en dérivant l'identité (6).

Exemple 4. Calculer

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

Solution.

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx.$$

En dérivant cette identité on trouve:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

ou

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+ \\ +Ex+F)(x^3-1).$$

En identifiant les coefficients correspondant aux mêmes puissances de x, on trouve:

$$D = 0;\ E - A = 0;\ F - 2B = 0;\ D + 3C = 0;\ E + 2A = 0; \\ B + F = -1;$$

d'où

$$A=0;\ B=-\frac{1}{3};\ C=0;\ D=0;\ E=0;\ F=-\frac{2}{3}$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}. \tag{7}$$

Pour calculer l'intégrale du second membre de l'égalité (7), décomposons la fraction $\frac{1}{x^3-1}$ en éléments simples:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

c'est-à-dire

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1). \tag{8}$$

En faisant $x = 1$, on trouve $L = \frac{1}{3}$.

En identifiant les coefficients de x de mêmes puissances dans les deux membres de l'égalité (8), on trouve:

$$L + M = 0; \quad L - N = 1,$$

c'est-à-dire

$$M = -\frac{1}{3}; \qquad N = -\frac{2}{3}.$$

Par suite,

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

et

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Calculer les intégrales:

1280. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

1281. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

1282. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1283. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

1284. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$.

1285. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1286. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

1287. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$.

1288. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$.

1289. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$.

1290. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx$.

1291. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$.

1292. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$.

1293. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

1294. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1295. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1296. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$.

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\,dx$.

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$.

Calculer les intégrales suivantes en appliquant la méthode d'Ostrogradsky :

1301. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

1302. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

1303. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

1304. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

Calculer les intégrales à l'aide de différentes méthodes:

1305. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$.

1306. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$.

1307. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$.

1308. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

1309. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

1313. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$.

1314. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

§ 6. Intégration de certaines fonctions irrationnelles

1°. Intégrales du type

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right]dx, \qquad (1)$$

où R est une fonction rationnelle et $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ ... des nombres entiers.

On calcule les intégrales du type (1) à l'aide du changement de variable

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^n,$$

où n est le plus petit commun multiple des nombres $q_1, q_2, \ldots$

Exemple 1. Calculer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}.$$

Solution. Le changement de variable $2x-1=z^4$ ramène l'intégrale à la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int \frac{2z^3\,dz}{z^2-z}=2\int \frac{z^2\,dz}{z-1}=$$

$$=2\int \left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz=(z+1)^2+2\ln|z-1|+C=$$

$$=\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C.$$

Calculer les intégrales:

1315. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

1316. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}.$

1317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$

1318. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

1319. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx.$

1320. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$

1321. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx.$

1322. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

1323. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

1324. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$

1325. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$

2°. Intégrales du type

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{2}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

On pose

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

où $Q_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$ à coefficients indéterminés et λ un nombre.

Les coefficients du polynôme $Q_{n-1}(x)$ et le nombre λ sont déterminés en dérivant l'identité (3).

Exemple 2.

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx=\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=$$

$$=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

D'où

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}+$$
$$+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\,x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

En multipliant par $\sqrt{x^2+4}$ et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve

$$A=\frac{1}{4};\quad B=0;\quad C=\frac{1}{2};\quad D=0;\quad \lambda=-2.$$

Par conséquent,

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$$

3°. Intégrales du type

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{4}$$

Ces intégrales se ramènent à des intégrales du type (2) à l'aide du changement de variable

$$\frac{1}{x-\alpha}=t.$$

Calculer les intégrales:

1326. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

1327. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1328. $\int\frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1329. $\int\frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

1330. $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

1331. $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$.

4°. Intégrales des binômes différentiels

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{5}$$

où m, n et p sont des nombres rationnels.

Les conditions de Tchébychev. L'intégrale (5) s'exprime à l'aide d'une combinaison finie de fonctions élémentaires seulement dans les trois cas suivants:

1) si p est un nombre entier,

2) si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier. Ici on utilise le changement de variable $a+bx^n=z^s$, où s est le dénominateur de la fraction p,

3) si $\frac{m+1}{n}+p$ est un nombre entier. Dans ce cas on se sert du changement de variable $ax^{-n}+b=z^s$.

Exemple 3. Calculer

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = I.$$

Solution. On a ici $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{4}$; $p=\frac{1}{}$; $\frac{m+1}{n}=$ $=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$. Par conséquent, on tombe sur le cas d'intégration (2).

La substitution

$$1+x^{\frac{1}{4}}=z^3$$

donne $x=(z^3-1)^4$, $dx=12z^2(z^3-1)^3\,dz$. Donc

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=12\int \frac{z^3(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2}\,dz=$$

$$=12\int (z^6-z^3)\,dz=\frac{12}{7}z^7-3z^4+C,$$

où $z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

Calculer les intégrales:

1332. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$

1333. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

1334. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

1335. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

1336. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}.$

1337. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.$

§ 7. Intégration des fonctions trigonométriques

1°. Intégrales du type

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = I_{m,n} \tag{1}$$

où m et n sont des nombres entiers.

1) Si $m=2k+1$ est un nombre positif impair, on pose alors

$$I_{m,n}=-\int \sin^{2k}x\cos^n x\,d(\cos x)=-\int (1-\cos^2 x)^k\cos^n x\,d(\cos x).$$

On procède de la même manière si n est un nombre positif impair.

Exemple 1.

$$\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx = \int \sin^{10} x\,(1-\sin^2 x)\, d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$$

2) Si m et n sont des nombres positifs pairs, on transforme l'expression qui se trouve sous le signe de l'intégrale (1) à l'aide des formules

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Exemple 2.

$$\int \cos^2 3x \sin^4 3x\, dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x\, dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4}\,\frac{1-\cos 6x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C.$$

3) Si $m = -\mu$ et $n = -\nu$ sont des nombres négatifs entiers de même parité, alors

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^\mu x \sec^{\nu-2} x\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}}\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\operatorname{tg}^\mu x}\, d(\operatorname{tg} x).$$

En particulier, l'intégrale ci-dessous se ramène à ce cas

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^\mu \frac{x}{2} \cos^\mu \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\cos^\nu x} =$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu \left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Exemple 3.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \, d(\operatorname{tg} x) = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

Exemple 4.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2^3}\int \frac{dx}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\int \operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2}\sec^6\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{8}\int \left[\operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right] + C.$$

4) Les intégrales du type $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ (ou $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$), où m est un nombre entier positif, se calculent à l'aide de la formule

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(ou respectivement $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

Exemple 5.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5) Dans le cas général, les intégrales $I_{m,n}$ du type (1) se calculent à l'aide des *formules de récurrence* que l'on établit en intégrant par parties.

Exemple 6.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx =$$

$$= \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

Calculer les intégrales :

1338. $\int \cos^3 x\,dx.$

1339. $\int \sin^5 x\,dx.$

1340. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx.$

1341. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\,dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx.$

1343. $\int \sin^4 x\,dx.$

1344. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx.$

1345. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx.$

1346. $\int \cos^6 3x\,dx.$

1347. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx.$

1350. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$

1351. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}.$

1352. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$

1353. $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x}\,dx.$

1354. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

1355. $\int \sec^5 4x\,dx.$

1356. $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx.$

1357. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

1358. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx.$

1359. $\int \left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4}\right) dx.$

1360. $\int x \sin^2 x^2\,dx.$

1361. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx.$

1362. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\,dx.$

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

2°. Intégrales du type $\int \sin mx \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \times \sin nx\,dx$ et $\int \cos mx \cos nx\,dx$. Dans ce cas, on utilise les formules :

1) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$;

2) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$;

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$.

Exemple 7.

$$\int \sin 9x \sin x\, dx = \int \frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 10x]\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

Calculer les intégrales:

1365. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$. 1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx$.

1366. $\int \sin 10x \sin 15x\, dx$. 1370. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)\, dt$.

1367. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$. 1371. $\int \cos x \cos^2 3x\, dx$.

1368. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{4}\, dx$. 1372. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$.

3°. Intégrales du type

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx, \tag{2}$$

où R est une fonction rationnelle.

1) A l'aide du changement de variable,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

d'où on déduit

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

les intégrales du type (2) se ramènent à des intégrales de fonctions rationnelles par rapport à la nouvelle variable t.

Exemple 8. Calculer

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = I.$$

Solution. En posant $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, on trouve

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C =$$
$$= \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2) Si l'identité

$$R(-\sin x,\ -\cos x) \equiv R(\sin x,\ \cos x)$$

est vérifiée, alors, pour ramener l'intégrale (2) à la forme rationnelle, on peut se servir du changement de variable $\operatorname{tg} x = t$.

Ici, on a

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

et

$$x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Exemple 9. Calculer

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = I. \tag{3}$$

Solution. En posant

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

on trouve

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

Remarquons que l'intégrale (3) se calcule plus rapidement que précédemment si on divise préalablement par $\cos^2 x$ le numérateur et le dénominateur de la fraction.

Dans certains cas, il est parfois utile d'avoir recours à des astuces (voir, par exemple, 1379).

Calculer les intégrales:

1373. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

1374. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

1375. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$.

1376. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

1377. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

1378. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

1379**. $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,dx$.

1380. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx$.

1381*. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 2x}$.

1382*. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

1383*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

1384*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$.

1385. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$.

1386. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

1387. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$

1388. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}\,dx.$

1389*. $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}.$

1390*. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx.$

§ 8. Intégration des fonctions hyperboliques

L'intégration des fonctions hyperboliques est analogue à l'intégration des fonctions trigonométriques.

Il suffit de se rappeler les formules fondamentales:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1;$

2) $\operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x-1);$

3) $\operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1);$

4) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x.$

Exemple 1. Calculer

$$\int \operatorname{ch}^2 x\,dx.$$

Solution. On a

$$\int \operatorname{ch}^2 x\,dx=\int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1)\,dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x+\frac{1}{2}x+C.$$

Exemple 2. Calculer

$$\int \operatorname{ch}^3 x\,dx.$$

Solution. On a

$$\int \operatorname{ch}^3 x\,dx=\int \operatorname{ch}^2 x\,d(\operatorname{sh} x)=\int (1+\operatorname{sh}^2 x)\,d(\operatorname{sh} x)=\operatorname{sh} x+$$
$$+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}+C.$$

Calculer les intégrales:

1391. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx.$

1392. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx.$

1393. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx.$

1394. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx.$

1395. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}.$

1396. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$

1397. $\int \operatorname{th}^3 x\,dx.$

1398. $\int \operatorname{cth}^4 x\,dx.$

1399. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}.$

1400. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}.$

1401*. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x-1}.$

1402. $\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}.$

§ 9. Application des substitutions trigonométriques et hyperboliques pour calculer les intégrales du type

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \tag{1}$$

où R est une fonction rationnelle.

En transformant le trinôme du second degré ax^2+bx+c en une somme ou une différence des carrés, l'intégrale (1) se ramène à l'une des intégrales des types suivants:

$$1)\ \int R\left(z, \sqrt{m^2-z^2}\right) dz;$$

$$2)\ \int R\left(z, \sqrt{m^2+z^2}\right) dz;$$

$$3)\ \int R\left(z, \sqrt{z^2-m^2}\right) dz.$$

Ces dernières intégrales s'intègrent respectivement à l'aide du changement de variable:

1) $z = m \sin t$ ou $z = m \operatorname{th} t$,
2) $z = m \operatorname{tg} t$ ou $z = m \operatorname{sh} t$,
3) $z = m \sec t$ ou $z = m \operatorname{ch} t$.

Exemple 1. Calculer

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = I.$$

Solution. On a

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1.$$

Posons $x+1 = \operatorname{tg} z$, alors $dx = \sec^2 z\, dz$ et

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\sec^2 z\, dz}{\operatorname{tg}^2 z \sec z} = \int \frac{\cos z}{\sin^2 z}\, dz =$$

$$= -\frac{1}{\sin z} + C = \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$$

Exemple 2. Calculer

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\, dx = I.$$

Solution. On a

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

En posant

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t \quad \text{et} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\, dt,$$

on trouve

$$I=\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int\operatorname{sh} t\operatorname{ch}^2 t\,dt-\frac{3}{8}\int\operatorname{ch}^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}\,\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t+\frac{1}{2}t\right)+C.$$

Puisque

$$\operatorname{sh} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad \operatorname{ch} t=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$$

et

$$t=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$

on a en définitive :

$$I=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$

$$-\frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

Calculer les intégrales :

1403. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$

1404. $\int\sqrt{2+x^2}\,dx.$

1405. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx.$

1406. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$

1407. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx.$

1408. $\int\sqrt{x^2+x}\,dx.$

1409. $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$

1410. $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx.$

1411. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$

1412. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$

1413. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1414. $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

§ 10. Intégration de différentes fonctions transcendantes

Calculer les intégrales :

1415. $\int(x^2+1)^2e^{2x}\,dx.$

1416. $\int x^2\cos^2 3x\,dx.$

1417. $\int x\sin x\cos 2x\,dx.$

1418. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

1419. $\int e^x \sin x \sin 3x\, dx.$

1420. $\int xe^x \cos x\, dx.$

1421. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

1422. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$

1423. $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx.$

1424. $\int \ln^2 (x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$

1425. $\int x \arccos(5x-2)\, dx.$

1426. $\int \sin x \operatorname{sh} x\, dx.$

§ 11. Application des « formules de récurrence »

Trouver les « formules de récurrence » pour les intégrales:

1427. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$; calculer I_2 et I_3.

1428. $I_n = \int \sin^n x\, dx$, calculer I_4 et I_5.

1429. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$; calculer I_3 et I_4.

1430. $I_n = \int x^n e^{-x}\, dx$; calculer I_{10}.

§ 12. Exemples mixtes d'intégration

1431. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}.$

1432. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}\, dx.$

1433. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}\, dx.$

1434. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}.$

1435. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}.$

1436. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$

1437. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$

1438. $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}.$

1439. $\int \frac{x\, dx}{(x^2-x+1)^3}.$

1440. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}\, dx.$

1441. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}\, dx.$

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

1443. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\, dx.$

1444. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}.$

1445. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}\, dx.$

1446. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}.$

1447. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\, dx.$

1448. $\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$

1449. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$

1450. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$

1451*. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$.

1452. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$.

1453. $\int \sqrt{x-4x^2}\,dx$.

1454. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1455. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

1456. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1457. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

1458. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1459. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$.

1460. $\int \cos^4 x\,dx$.

1461. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x}$.

1462. $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx$.

1463. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$.

1464. $\int \operatorname{cosec}^5 5x\,dx$.

1465. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

1466. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$.

1467. $\int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

1468. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$.

1469. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$.

1470. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+2\sin^2 x}$.

1471. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$.

1472. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

1473. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}}\,dx$.

1474. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2+\sin^2 ax}}\,dx$.

1475. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$.

1476. $\int x\sin^2 x\,dx$.

1477. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$.

1478. $\int xe^{2x}\,dx$.

1479. $\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\,dx$.

1480. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1481. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

1482. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

1483. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\sin^2 x}$.

1484. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,dx$.

1485. $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1486. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}\,dx$.

1487. $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$.

1488. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x}$.

1489. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\,dx.$

1490. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^{\frac{1}{4}}}\,dx.$

1491. $\int \frac{2^x}{1-4^x}\,dx.$

1492. $\int (x^2-1)\,10^{-2x}\,dx.$

1493. $\int \sqrt{e^x+1}\,dx.$

1494. $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx.$

1495. $\int x^3 \arcsin \frac{1}{x}\,dx.$

1496. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

1497. $\int (x^2-3x)\sin 5x\,dx.$

1498. $\int x \operatorname{arctg}(2x+3)\,dx.$

1499. $\int \arcsin \sqrt{x}\,dx.$

1500. $\int |x|\,dx.$

CHAPITRE V

INTÉGRALE DÉFINIE

§ 1. Intégrale définie en tant que limite de sommes

1°. Somme intégrale. Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ avec $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une partition arbitraire en n parties (fig. 37). On appelle *somme intégrale* de la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$ toute somme de la forme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \tag{1}$$

où $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$,

$$i = 0, 1, 2, \ldots (n-1).$$

Géométriquement, S_n représente l'aire algébrique de la figure en escalier (voir fig. 37).

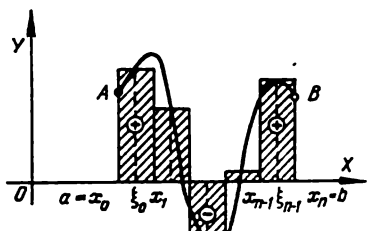


Fig. 37

2°. Intégrale définie. La limite de la somme S_n quand le nombre de divisions n tend vers l'infini et que le plus grand des Δx_i tend vers zéro s'appelle l'*intégrale définie* de la fonction $f(x)$ entre les limites (ou bornes) $x = a$ et $x = b$, c est-à-dire

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$, elle est intégrable sur $[a, b]$, c est-à-dire la limite (2) existe et est indépendante du procédé de par-

tage de l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en intervalles fermés partiels et du choix des points ξ_i sur ceux-ci. Géométriquement, l'intégrale définie (2) n'est autre que la somme algébrique des aires des figures constituant le trapèze curviligne $aABb$, où l'aire des parties situées au-dessus de l'axe OX est prise avec le signe plus et l'aire des parties situées au-dessous de l'axe OX avec le signe moins (voir fig. 37).

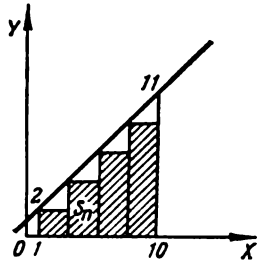


Fig. 38

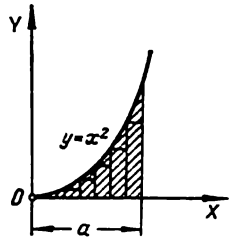


Fig. 39

Les définitions de la somme intégrale et de l'intégrale définie se généralisent naturellement pour le cas de l'intervalle fermé $[a, b]$ où $a > b$.

Exemple 1. Former la somme intégrale S_n pour la fonction

$$f(x) = 1 + x$$

sur l'intervalle fermé $[1, 10]$ en le partageant en n parties égales et en choisissant les points ξ_i aux extrémités gauches des intervalles fermés partiels $[x_i, x_{i+1}]$. Calculer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Solution. Ici $\Delta x_i = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$ et $\xi_i = x_i = x_0 + i\Delta x_i = 1 + \frac{9i}{n}$. D'où $f(\xi_i) = 1 + 1 + \frac{9i}{n} = 2 + \frac{9i}{n}$. Par conséquent, (fig. 38)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(2+\frac{9i}{n}\right)\frac{9}{n} = \frac{18}{n}\,n + \frac{81}{n^2}\,(0+1+\ldots+n-1) =$$

$$= 18 + \frac{81}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = 18 + \frac{81}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 58\frac{1}{2} - \frac{81}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 58\frac{1}{2}.$$

Exemple 2. Calculer l'aire de la figure limitée par l'arc de parabole $y = x^2$, l'axe OX et les droites $x = 0$ et $x = a$ $(a > 0)$.

Solution. Partageons la base a en n parties égales $\Delta x = \frac{a}{n}$. En prenant la valeur de la fonction à l'extrémité gauche de chaque

intervalle, on a:

$$y_1=0,\quad y_2=\left(\frac{a}{n}\right)^2,\quad y_3=\left[2\left(\frac{a}{n}\right)^2\right],\ \ldots,\ y_n=\left[(n-1)\frac{a}{n}\right]^2.$$

Les aires des rectangles sont obtenues en multipliant chaque y_k par sa base $\Delta x=\frac{a}{n}$ (fig. 39). En sommant, on trouve l'aire de la figure en escalier

$$S_n=\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2[1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2].$$

En utilisant la formule donnant la somme des carrés des nombres entiers

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on trouve:

$$S_n=\frac{a^3n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

et en passant à la limite:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{a^3}{3}.$$

On demande de calculer les intégrales définies en les considérant comme des limites de sommes intégrales:

1501. $\int_a^b dx.$

1502. $\int_0^T (v_0+gt)\,dt,$

v_0 et g sont des constantes.

1503. $\int_{-2}^{1} x^2\,dx.$

1504. $\int_0^{10} 2^x\,dx.$

1505*. $\int_1^5 x^3\,dx.$

1506*. Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par l'hyperbole

$$y=\frac{1}{x},$$

les deux droites $x=a$ et $x=b$ $(0<a<b)$ et l'axe OX.

1507*. Calculer

$$f(x)=\int_0^x \sin t\,dt.$$

§ 2. Calcul des intégrales définies à l'aide des intégrales indéfinies

1°. Intégrale définie à limite supérieure variable. Si la fonction $f(t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, alors la fonction

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire

$$F'(x)=f(x) \quad \text{pour} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

2°. Formule de Newton-Leibniz. Si $F'(x)=f(x)$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

On détermine la primitive $F(x)$ en calculant l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Exemple 1. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{3} x^4\,dx$.

Solution. $\int_{-1}^{3} x^4\,dx=\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3}=\frac{3^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}=48\frac{4}{5}$.

1508. Soit

$$I=\int_a^b \frac{dx}{\ln x} \quad (b>a>1).$$

Calculer :

$$1)\ \frac{dI}{da};\quad 2)\ \frac{dI}{db}.$$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1509. $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt\ (x>0)$. **1511.** $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

1510. $F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$. **1512.** $I=\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt\ (x>0)$.

1513. Déterminer les points d'extrémum de la fonction

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ dans le domaine } x>0.$$

Calculer les intégrales en appliquant la formule de Newton-Leibniz :

1514. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

1515. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

1516. $\int_{-x}^{x} e^t\,dt$.

1517. $\int_0^x \cos t\,dt$.

Calculer les limites des sommes à l'aide d'intégrales définies :

1518**. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

1519**. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

1520. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

Calculer les intégrales :

1521. $\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx$.

1522. $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$.

1523. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$.

1524. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$.

1525. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

1526. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

1527. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

1528. $\int_{-1}^1 \frac{y^5\,dy}{y+2}$.

1529. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

1530. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

1531. $\int\limits_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}\,dz.$

1532. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha\,d\alpha.$

1533. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1534. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

1535. $\int\limits_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}.$

1536. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\,d\alpha.$

1537. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi.$

1538. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$

1539. $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx.$

1540. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx.$

1541. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4\varphi\,d\varphi.$

1542. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

1543. $\int\limits_0^1 \operatorname{ch} x\,dx.$

1544. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$

1545. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x\,dx.$

§ 3. Intégrales impropres

1°. Intégrales des fonctions non bornées. Si la fonction $f(x)$ n'est pas bornée dans tout voisinage du point c de l'intervalle fermé $[a, b]$ et si elle est continue pour $a \leqslant x < c$ et $c < x \leqslant b$, on pose par définition:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Si les limites au second membre de l'égalité (1) existent et sont finies, l'intégrale impropre est dite *convergente*, dans le cas contraire *divergente*. Pour $c = a$ ou $c = b$, les définitions correspondantes se simplifient.

S'il existe une fonction continue $F(x)$ sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et telle que $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq c$ (*primitive généralisée*), alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Si $|f(x)| \leqslant F(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ et $\int_a^b F(x)\,dx$ converge, l'intégrale (1) converge aussi (*critère de comparaison*).

Si $f(x) \geqslant 0$ et si $\lim\limits_{x \to c} f(x)\,|c - x|^m = A \neq \infty$, $A \neq 0$, c'est-à-dire $f(x) \sim \dfrac{A}{|c - x|^m}$ pour $x \to c$, alors 1) pour $m < 1$ l'intégrale (1) converge, 2) pour $m \geqslant 1$ l'intégrale (1) diverge.

2°. Intégrales à limites infinies. Si la fonction $f(x)$ est continue pour $a \leqslant x < +\infty$, on pose par définition

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

et, en fonction de l'existence ou de l'inexistence d'une limite finie au second membre de l'égalité (3), l'intégrale correspondante est dite *convergente* ou *divergente*.

De même

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si $|f(x)| \leqslant F(x)$ et si l'intégrale $\int_a^\infty F(x)\,dx$ converge, l'intégrale (3) converge aussi.

Si $f(x) \geqslant 0$ et si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)\,x^m = A \neq \infty$, $A \neq 0$, c'est-à-dire $f(x) \sim \dfrac{A}{x^m}$ pour $x \to \infty$, 1) pour $m > 1$ l'intégrale (3) converge, 2) pour $m \leqslant 1$ l'intégrale (3) diverge.

Exemple 1.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \infty,$$

c'est-à-dire l'intégrale diverge.

Exemple 2.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 3. Etudier la convergence de *l'intégrale des probabilités*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{4}$$

Solution. Posons

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

La première des deux intégrales du second membre n'est pas impropre. La seconde intégrale converge puisque $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$ et

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1},$$

par conséquent, l'intégrale (4) converge.

Exemple 4. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_{+1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \tag{5}$$

Solution. Pour $x \to \infty$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Puisque l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

converge, l'intégrale (5) converge aussi.

Exemple 5. Etudier la convergence de l'intégrale elliptique

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{6}$$

S o l u t i o n. $x=1$ est un point de discontinuité de la fonction à intégrer. On trouve en appliquant la formule de Lagrange

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot 4x_1^3}}=\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{2x_1^{\frac{3}{2}}},$$

où $x<x_1<1$. Par conséquent, pour $x\to 1$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Puisque l'intégrale

$$\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}dx$$

converge, alors l'intégrale (6) converge aussi.

Calculer les intégrales impropres (ou démontrer leur divergence) :

1546. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1547. $\int_{-1}^2\frac{dx}{x}$.

1548. $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3\frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1551. $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$.

1553. $\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$.

1554. $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

1556. $\int_0^\infty\sin x\,dx$.

1557. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln x}$.

1558. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1559. $\int_a^\infty\frac{dx}{x\ln x}$ $(a>1)$.

1560. $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} \quad (a > 1).$

1561. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx.$

1562. $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \, dx \quad (k > 0).$

1563. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} \, dx.$

1564. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

1565. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}.$

1566. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}.$

Etudier la convergence des intégrales:

1567. $\int\limits_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}.$

1568. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}.$

1569. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}.$

1570. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^5+1}}.$

1571. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$

1572. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\ln x}.$

1573. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, dx.$

1574*. Démontrer que l'intégrale d'Euler de première espèce (*fonction bêta*)

$$\mathrm{B}(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

converge pour $p > 0$ et $q > 0$.

1575*. Démontrer que l'intégrale d'Euler de seconde espèce (*fonction gamma*)

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx$$

converge pour $p > 0$.

§ 4. Changement de variable dans une intégrale définie

Si la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$, si $x = \varphi(t)$ est une fonction continue ainsi que sa dérivée $\varphi'(t)$ sur l'intervalle fermé $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, où $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$ et si $f[\varphi(t)]$ est définie et continue sur l'intervalle fermé $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple 1. Calculer

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0).$$

Solution. Posons

$$x = a \sin t;$$
$$dx = a \cos t\,dt.$$

Alors $t = \arcsin \frac{x}{a}$ et, par conséquent, on peut prendre $\alpha = \arcsin 0 = 0$, $\beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a \cos t\,dt =$$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

1576. Peut-on effectuer le changement de variable $x = \cos t$ dans l'intégrale

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1 - x^2}\,dx\,?$$

Transformer les intégrales définies à l'aide de changements de variable indiqués:

1577. $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx, \quad x=2t-1.$

1578. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x=\sin t.$

1579. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x=\operatorname{sh} t.$

1580. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx, \quad x=\operatorname{arctg} t.$

1581. Déterminer une substitution linéaire entière

$$x = \alpha t + \beta$$

de manière que dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (b > a)$$

les limites d'intégration deviennent 0 et 1.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de changements de variable indiqués:

1582. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \qquad x=t^2.$

1583. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,dx, \qquad x-2=z^3.$

1584. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx, \qquad e^x-1=z^2.$

1585. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}, \qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2}=z.$

1586. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}, \qquad \operatorname{tg} x=t.$

Calculer les intégrales à l'aide de changements de variable convenables :

1587. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

1588. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

1589. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$

1590. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$

Calculer les intégrales :

1591. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

1592. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

1593. $\int\limits_0^a \sqrt{ax-x^2}\,dx.$

1594. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}.$

1595. Démontrer que si la fonction $f(x)$ est paire, on a

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

De même si la fonction $f(x)$ est impaire, on a

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

1596. Montrer que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

1597. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

1598. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx.$$

§ 5. Intégration par parties

Si les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont continûment dérivables sur l'intervalle fermé $[a, b]$, on a

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx. \qquad (1)$$

Calculer les intégrales en appliquant la formule d'intégration par parties:

1599. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx.$

1600. $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx.$

1601. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x}\, dx.$

1602. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx.$

1603. $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx.$

1604. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx \quad (a > 0).$

1605. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx \quad (a > 0).$

1606.** Montrer que la fonction gamma (voir n° 1575) satisfait à la formule de récurrence:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \qquad (p > 0).$$

En déduire que $\Gamma(n+1) = n!$ si n est un nombre entier.

1607. Montrer que pour l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$$

la formule de récurrence

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

est vraie.

Calculer I_n si n est un nombre entier. Utiliser la formule obtenue pour calculer I_9 et I_{10}.

1608. Calculer l'intégrale (voir n° 1574)

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx,$$

où p et q sont des nombres entiers positifs, en appliquant plusieurs fois l'intégration par parties.

1609*. Exprimer l'intégrale

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

à l'aide de la fonction B (fonction bêta), si m et n sont des nombres entiers non négatifs.

§ 6. Théorème de la moyenne

1°. Evaluations des intégrales. Si $f(x) \leqslant F(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b F(x)\, dx. \tag{1}$$

Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions continues pour $a \leqslant x \leqslant b$ et si de plus $\varphi(x) \geqslant 0$, alors

$$m \int_a^b \varphi(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx \leqslant M \int_a^b \varphi(x)\, dx, \tag{2}$$

où m est la plus petite valeur et M la plus grande valeur de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

En particulier, si $\varphi(x) \equiv 1$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{3}$$

Les inégalités (2) et (3) peuvent respectivement être remplacées par des égalités équivalentes

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

et

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

où c et ξ sont des nombres compris entre a et b.

Exemple 1. Evaluer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx.$$

Solution. Puisque $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, on a

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire $1{,}57 < I < 1{,}91$.

2°. Valeur moyenne d'une fonction. Par définition le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

s'appelle *valeur moyenne* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$.

1610*. Déterminer le signe des intégrales sans les calculer :

a) $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$;

b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$;

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1611. Déterminer (sans les calculer) la plus grande des intégrales:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ ou $\int_0^1 x\,dx$;

b) $\int_0^1 x^2 \sin^2 x\,dx$ ou $\int_0^1 x \sin^2 x\,dx$;

c) $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ ou $\int_1^2 e^x\,dx$.

Calculer la valeur moyenne des fonctions sur les intervalles indiqués:

1612. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
1613. $f(x) = a + b\cos x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.
1614. $f(x) = \sin^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
1615. $f(x) = \sin^4 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1616. Montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ est compris entre $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70$. Trouver la valeur exacte de cette intégrale.

Evaluer les intégrales:

1617. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$.

1618. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{8+x^3}$.

1619. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

1620*. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

1621. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1622. Démontrer en intégrant par parties que

$$0 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\, dx < \frac{1}{100\pi}.$$

§ 7. Aires des figures planes

1°. Calcul des aires en coordonnées rectangulaires. Si une courbe continue est donnée en coordonnées rectangulaires par une équation de la forme $y = f(x)$ $[f(x) \geqslant 0]$,

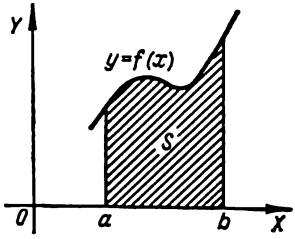


Fig. 40

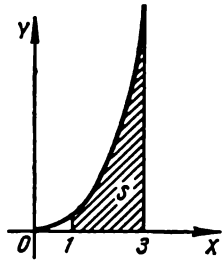


Fig. 41

alors l'aire du trapèze curviligne limité par cette courbe, par les deux droites $x = a$ et $x = b$ et l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$ de l'axe des abscisses (fig. 40) est donnée par la formule

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Exemple 1. Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y = \frac{x^2}{2}$, les droites $x = 1$ et $x = 3$ et l'axe des abscisses (fig. 41).

Solution. L'aire cherchée est donnée par l'intégrale

$$S = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\, dx = 4\frac{1}{3}.$$

Exemple 2. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $x = 2 - y - y^2$ et l'axe des ordonnées (fig. 42).

Solution. Dans ce cas, les rôles des axes sont intervertis et, par suite, l'aire cherchée s'exprime par l'intégrale

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = 4\frac{1}{2},$$

où les limites d'intégration $y_1 = -2$ et $y_2 = 1$ sont les ordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

Dans un cas plus général, si la figure S est limitée par les deux courbes continues $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ et par les deux droites $x = a$

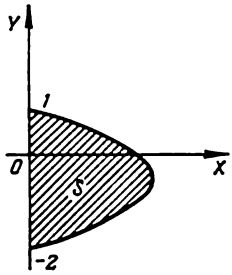


Fig. 42

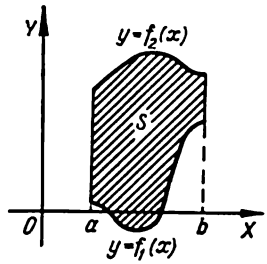


Fig. 43

et $x = b$ où $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 43), on a:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{2}$$

E x e m p l e 3. Calculer l'aire de la figure limitée par les deux courbes

$$y = 2 - x^2 \text{ et } y^3 = x^2 \tag{3}$$

(fig. 44).

S o l u t i o n. On détermine les limites d'intégration: $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ en résolvant le système des équations (3). D'après la formule (2), on a

$$S = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}})\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}\right)_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}.$$

Si la courbe est donnée par des équations sous forme paramétrique $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, l'aire du trapèze curviligne limité par cette courbe, les deux verticales $x = a$ et $x = b$ et l'intervalle fermé de l'axe OX, s'exprime par l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt,$$

où t_1 et t_2 sont déterminées par les équations $a = \varphi(t_1)$ et $b = \varphi(t_2)$ [$\psi(t) \geqslant 0$ sur l'intervalle fermé $[t_1, t_2]$].

Exemple 4. Calculer l'aire de l'ellipse (fig. 45) en utilisant ses équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Solution. Vu que l'ellipse est une courbe symétrique par rapport à l'origine des coordonnées, il suffit de calculer l'aire du quart

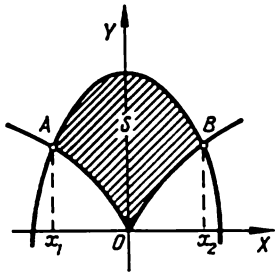


Fig. 44

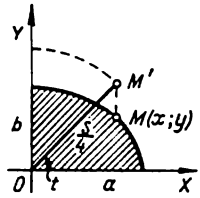


Fig. 45

de l'ellipse puis de multiplier le résultat par quatre. En faisant dans l'équation $x = a \cos t$ d'abord $x = 0$, puis $x = a$, on détermine les limites d'intégration $t_1 = \frac{\pi}{2}$ et $t_2 = 0$. Donc

$$\frac{1}{4} S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \sin a\,(-\sin t)\,dt = ab \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}$$

et, par conséquent, $S = \pi ab$.

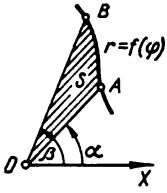


Fig. 46

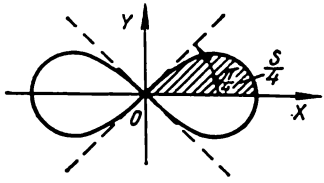


Fig. 47

2°. Calcul des aires en coordonnées polaires. Si la courbe est donnée en coordonnées polaires par une équation de la forme $r = f(\varphi)$, alors l'aire du secteur AOB (fig. 46) limité par l'arc de courbe et par les deux rayons polaires OA et OB

correspondant aux valeurs $\varphi_1 = \alpha$ et $\varphi_2 = \beta$ est donnée par l'intégrale

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 \, d\varphi.$$

Exemple 5. Calculer l'aire intérieure à la lemniscate de Bernoulli $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (fig. 47).

Solution. Vu la symétrie de la courbe, calculons d'abord le quart de l'aire cherchée

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

D'où $S = a^2$.

1623. Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y = 4x - x^2$ et l'axe des abscisses.

1624. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $y = \ln x$, l'axe OX et la droite $x = e$.

1625*. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $y = x(x-1)(x-2)$ et l'axe OX.

1626. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $y^3 = x$, la droite $y = 1$ et la verticale $x = 8$.

1627. Calculer l'aire de la figure limitée par une demi-onde de la sinusoïde $y = \sin x$ et l'axe OX.

1628. Calculer l'aire de la figure comprise entre la courbe $y = \operatorname{tg} x$, l'axe OX et la droite $x = \frac{\pi}{3}$.

1629. Calculer l'aire de la figure comprise entre l'hyperbole $xy = m^2$, les verticales $x = a$, $x = 3a$ $(a > 0)$ et l'axe OX.

1630. Calculer l'aire comprise entre l'agnésienne $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ et l'axe des abscisses.

1631. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $y = x^3$, la droite $y = 8$ et l'axe OY.

1632. Calculer l'aire de la figure limitée par les paraboles $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2py$.

1633. Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y = 2x - x^2$ et la droite $y = -x$.

1634. Calculer l'aire du segment de parabole $y = x^2$ défini par la droite $y = 3 - 2x$.

1635. Calculer l'aire de la figure comprise entre les paraboles $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ et la droite $y = 2x$.

1636. Calculer l'aire de la figure comprise entre les paraboles $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

1637. Calculer l'aire de la figure comprise entre l'agnésienne $y = \frac{1}{1+x^2}$ et la parabole $y = \frac{x^2}{2}$.

1638. Calculer l'aire de la figure limitée par les courbes $y = e^x$, $y = e^{-x}$ et la droite $x = 1$.

1639. Calculer l'aire de la figure limitée par l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et la droite $x = 2a$.

1640*. Calculer l'aire totale de la figure limitée par l'astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

1641. Calculer l'aire de la figure comprise entre la chaînette

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

l'axe OY et la droite $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$.

1642. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

1643. Calculer l'aire intérieure à la courbe

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1.$$

1644. Calculer l'aire de la figure comprise entre l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 9$, l'axe OX et le diamètre passant par le point $(5, 4)$.

1645. Calculer l'aire de la figure comprise entre la courbe $y = \frac{1}{x^2}$, l'axe OX et la droite $x = 1$ $(x > 1)$.

1646*. Calculer l'aire de la figure limitée par la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ et son asymptote $x = 2a$ $(a > 0)$.

1647*. Calculer l'aire de la figure comprise entre la strophoïde $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a - x}$ et son asymptote $(a > 0)$.

1648. Calculer l'aire des deux parties du cercle $x^2 + y^2 = 8$ délimité par la parabole $y^2 = 2x$.

1649. Calculer l'aire de la figure comprise entre le cercle $x^2 + y^2 = 16$ et la parabole $x^2 = 12(y - 1)$.

1650. Calculer l'aire intérieure à l'astroïde

$$x = a\cos^3 t; \quad y = b\sin^3 t.$$

1651. Calculer l'aire de la figure limitée par l'axe OX et un arc de cycloïde

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

1652. Calculer l'aire de la figure limitée par une branche de trochoïde

$$\begin{cases} x = at - b\sin t, \\ y = a - b\cos t \end{cases} \quad (0 < b \leqslant a)$$

et la tangente aux points les plus bas de cette branche.

1653. Calculer l'aire de la figure limitée par la cardioïde

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

1654*. Calculer l'aire de la boucle du folium de Descartes

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

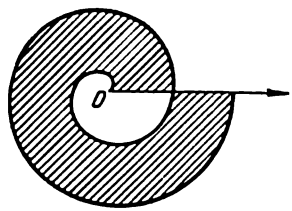


Fig. 48

1655*. Calculer l'aire totale de la cardioïde $r = a(1 + \cos\varphi)$.

1656*. Calculer l'aire de la figure comprise entre la première et la deuxième spire de la spirale d'Archimède $r = a\varphi$ (fig. 48).

1657. Calculer l'aire d'une boucle de la courbe $r = a\cos 2\varphi$.

1658. Calculer l'aire totale de la figure limitée par la courbe $r^2 = a^2\sin 4\varphi$.

1659*. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $r = a\sin 3\varphi$.

1660. Calculer l'aire de la figure limitée par le limaçon de Pascal

$$r = 2 + \cos \varphi.$$

1661. Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ et les demi-droites $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

1662. Calculer l'aire de l'ellipse $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ $(\varepsilon < 1)$.

1663. Calculer l'aire de la figure extérieure au cercle $r = a$ et limitée par la courbe $r = 2a \cos 3\varphi$.

1664*. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

§ 8. Longueur d'un arc de courbe

1°. Longueur d'un arc de courbe en coordonnées rectangulaires. La longueur s d'un arc de courbe d'équation $y = f(x)$ compris entre deux points d'abscisses $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 dx}.$$

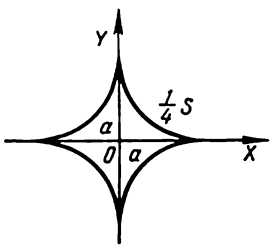


Fig. 49

Exemple 1. Calculer la longueur de l'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 49).

Solution. On a, en dérivant l'équation de l'astroïde,

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Donc, la longueur du quart de l'astroïde est

$$\frac{1}{4} s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{2} a.$$

D'où $s = 6a$.

2°. Longueur d'un arc de courbe donnée sous forme paramétrique. Si la courbe est donnée par des équations sous forme paramétrique $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$, alors la longueur s de l'arc de courbe est égale à

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

où t_1 et t_2 sont les valeurs du paramètre correspondant aux extrémités de l'arc.

Exemple 2. Calculer la longueur d'un arc de cycloïde (fig. 50)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solution. On a $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ et $\frac{dy}{dt} = a \sin t$. Donc

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

Les limites d'intégration $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ correspondent aux extrémités de l'arc de cycloïde.

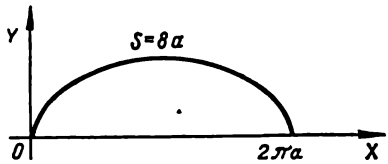


Fig. 50

Si la courbe est donnée par une équation en coordonnées polaires de la forme $r = f(\varphi)$, alors la longueur de l'arc s est égale à

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi,$$

où α et β sont les valeurs de l'angle polaire correspondant aux extrémités de l'arc.

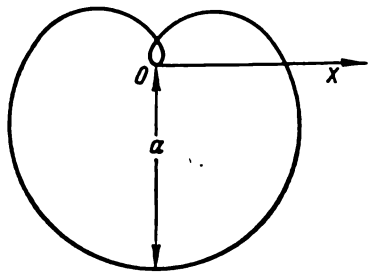


Fig. 51

Exemple 3. Calculer la longueur totale de la courbe $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ (fig. 51). On décrit toute la courbe en faisant varier φ de 0 à 3π.

Solution. On a $r' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$, donc la longueur totale de la courbe est

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3}\, d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

1665. Calculer la longueur de l'arc de la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$ compris entre l'origine des coordonnées et le point $x = 4$.

1666*. Calculer la longueur de l'arc de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ compris entre le sommet A (O, a) et le point B (b, h).

1667. Calculer la longueur de l'arc de la parabole $y = 2\sqrt{x}$ compris entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

1668. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = e^x$ compris entre les points $(0, 1)$ et $(1, e)$.

1669. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \ln x$ compris entre les points d'abscisses $x = \sqrt{3}$ et $x = \sqrt{8}$.

1670. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \arcsin e^{-x}$ compris entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

1671. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $x = \ln \sec y$ compris entre les points d'ordonnées $y = 0$ et $y = \frac{\pi}{3}$.

1672. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ compris entre les points d'ordonnées $y = 1$ et $y = e$.

1673. Calculer la longueur de la branche de tractrice qui correspond aux $x > 0$

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right|,$$

compris entre les points d'ordonnées $y = a$ et $y = b$ $(0 < b < a)$.

1674. Calculer la longueur de l'arc fermé de la courbe $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

1675. Trouver la longueur de l'arc de la courbe $y = \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{a}\right)$ compris entre les points d'abscisse $x = a$ et $x = b$ $(0 < a < b)$.

1676*. Calculer la longueur de l'arc de la développante de cercle

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t), \\ y &= a(\sin t - t\cos t), \end{aligned}\right\}$$

pour t variant de $t = 0$ à $t = T$.

1677. Calculer la longueur de la développée d'ellipse

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t\ (c^2 = a^2 - b^2).$$

1678. Calculer la longueur de la courbe

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t). \end{aligned}\right\}$$

1679. Calculer la longueur de la première spire de la spirale d'Archimède $r = a\varphi$.

1680. Calculer la longueur totale de la cardioïde $r = a(1 + \cos\varphi)$.

1681. Calculer la longueur de l'arc de la parabole $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ défini par une droite verticale passant par le pôle.

1682. Calculer la longueur de l'arc de la spirale hyperbolique $r\varphi = 1$ compris entre les points $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

1683. Calculer la longueur de l'arc de la spirale logarithmique $r = ae^{m\varphi}$, intérieur au cercle $r = a$.

1684. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ compris entre les points de rayon vecteur $r=1$ et $r=3$.

§ 9. Volumes des corps

1°. Volume des corps de révolution. Le volume du corps obtenu par la rotation d'un trapèze curviligne limité par la courbe $y = f(x)$, l'axe OX et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$ autour des axes OX ou OY est donné respectivement par les formules

$$1)\ V_X = \pi\int_a^b y^2\,dx; \qquad 2)\ V_Y = 2\pi\int_a^b xy\,dx\ ^{*)}.$$

---

*) Le corps est engendré par la rotation du trapèze curviligne limité par la courbe $y = f(x)$, les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ autour de l'axe OY. On prend comme élément de volume de ce corps le volume de la partie du corps engendré par la rotation autour de l'axe OY d'un rectangle de côtés y et dx et se trouvant à la distance x de l'axe OY. Par conséquent, l'élément de volume $dV_Y = 2\pi xy\,dx$, d'où $V_Y = 2\pi\int_a^b xy\,dx$.

Exemple 1. Calculer le volume du corps obtenu par la rotation d'une figure limitée par une demi-onde de la sinusoïde $y = \sin x$ et le segment $0 \leqslant x \leqslant \pi$ de l'axe OX autour: a) de l'axe OX et b) de l'axe OY.

Solution.

$$\text{a) } V_X = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{2};$$

$$\text{b) } V_Y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx = 2\pi\,(-x\cos x + \sin x)_0^{\pi} = 2\pi^2.$$

Le volume d'un corps engendré par la rotation autour de l'axe OY d'une figure limitée par une courbe $x = g(y)$, l'axe OY et les deux parallèles $y = c$ et $y = d$ peut être donné par la formule:

$$V_Y = \pi \int_c^d x^2\, dy,$$

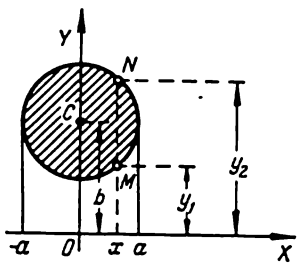


Fig. 52

déduite de la formule 1) précitée en intervertissant le rôle des coordonnées x et y.

Si la courbe est donnée sous une autre forme (sous forme paramétrique, en coordonnées polaires, etc.), on peut effectuer dans les formules précitées un changement de variable adéquat de la variab e d'intégration.

Plus généralement les volumes des corps engendrés par la rotation d'une figure limitée par des courbes $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$ (avec $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) et les droites $x = a$, $x = b$ autour des axes de coordonnées OX et OY sont respectivement donnés par les formules.

$$V_X = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

et

$$V_Y = 2\pi \int_a^b x\,(y_2 - y_1)\, dx.$$

Exemple 2. Calculer le volume d'un tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ autour de l'axe OX (fig. 52).

Solution. On a

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \text{ et } y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Donc, $V_X = \pi \int_{-a}^{a} [(b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2]\, dx =$

$$= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = 2\pi^2 a^2 b$$

(la dernière intégrale s'intègre à l'aide du changement de variable $x = a \sin t$).

Le volume d'un corps engendré par la rotation d'un secteur limité par l'arc de courbe $r = F(\varphi)$ et deux rayons vecteurs $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, autour de l'axe polaire, peut être calculé d'après la formule

$$V_P = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Cette formule est commode pour calculer le volume des corps engendrés par la rotation autour de l'axe polaire d'une courbe fermée donnée en coordonnées polaires.

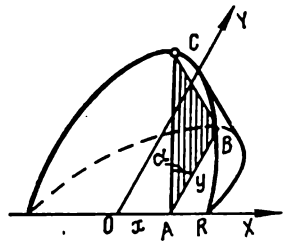


Fig. 53

Exemple 3. Calculer le volume engendré par la rotation de la courbe $r = a \sin 2\varphi$ autour de l'axe polaire.

Solution.

$$V_P = 2\cdot\frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2°. Calcul des volumes des corps d'après les sections transversales. Si $S = S(x)$ est l'aire d'une section d'un corps obtenu par l'intersection d'un plan perpendiculaire à une droite donnée (que l'on prend pour l'axe OX), au point d'abscisse x, alors le volume de ce corps est égal à

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\, dx,$$

où x_1 et x_2 sont les abscisses des points extrêmes du corps.

Exemple 4. Calculer le volume du corps commun à un cylindre circulaire et à la partie de l'espace se trouvant entre la base du cylindre, un plan formant avec cette dernière un angle α et passant par un diamètre de la base du cylindre. Le rayon de la base est R (fig. 53).

S o l u t i o n. Prenons pour axe OX le diamètre de la base suivant lequel le plan sécant coupe la base et pour axe OY le diamètre de la base qui lui est perpendiculaire. L'équation du cercle de base est $x^2 + y^2 = R^2$.

L'aire de la section ABC distante de x de l'origine des coordonnées O est égale à

$$S(x) = \text{aire du triangle } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} yy \operatorname{tg} \alpha = \frac{y^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Donc, le volume cherché est

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R y^2 \operatorname{tg} \alpha \, dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) \, dx = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha R^3.$$

1685. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OX de la figure limitée par l'axe OX et la parabole $y = ax - x^2$ $(a > 0)$.

1686. Calculer le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de l'axe OX.

1687. Calculer le volume du corps obtenu par la rotation autour de l'axe OX de la figure limitée par la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, l'axe OX et les droites $x = \pm a$.

1688. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OX de la partie de la courbe $y = \sin^2 x$ comprise entre les points $x = 0$ et $x = \pi$.

1689. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OX de la figure limitée par la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$, l'axe OX et la droite $x = 1$.

1690. Calculer le volume du corps obtenu par la rotation de la figure de l'exercice n° 1689 autour de l'axe OY.

1691. Calculer le volume du corps engendré par la rotation de la figure limitée par la courbe $y = e^x$ et les droites $x = 0$, $y = 0$ autour: a) de l'axe OX et b) de l'axe OY.

1692. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OY de la partie de la parabole $y^2 = 4ax$ qui est délimitée par la droite $x = a$.

1693. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de la droite $x = a$ de la partie de la parabole $y^2 = 4ax$ qui est délimitée par cette droite.

1694. Calculer le volume du corps obtenu par la rotation autour de l'axe $y = -p$ de la figure limitée par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = \frac{p}{2}$.

1695. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OX de la figure comprise entre les paraboles $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

1696. Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OX de la boucle de la courbe

$$(x - 4a)\, y^2 = ax\,(x - 3a) \qquad (a > 0).$$

1697. Calculer le volume du corps engendré par la rotation de la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ autour de son asymptote $x = 2a$.

1698. Calculer le volume d'un paraboloïde de révolution de rayon de base R et de hauteur H.

1699. Un segment de parabole droit de base $2a$ et de hauteur h tourne autour de la base. Calculer le volume du corps de révolution ainsi engendré.

1700. Montrer que le volume de la partie du corps engendré par la rotation de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$ autour de l'axe OX délimitée par le plan $x = 2a$ est égal au volume de la sphère de rayon a.

1701. Calculer le volume du corps engendré par la rotation de la figure limitée par un arc de cycloïde $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ et l'axe OX autour: a) de l'axe OX, b) de l'axe OY et c) de l'axe de symétrie de la figure.

1702. Calculer le volume du corps engendré par la rotation de l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ autour de l'axe OY.

1703. Calculer le volume du corps que l'on obtient par la rotation de la cardioïde $r = a\,(1 + \cos \varphi)$ autour de l'axe polaire.

1704. Calculer le volume du corps engendré par la rotation de la courbe $r = a \cos^2 \varphi$ autour de l'axe polaire.

1705. Calculer le volume d'un obélisque dont les bases parallèles sont des rectangles de côtés A, B et a, b et de hauteur h.

1706. Calculer le volume d'un cône elliptique droit dont la base est une ellipse de demi-axes a et b et de hauteur h.

1707. Sur chaque corde de l'astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ parallèle à l'axe OX on construit un carré, admettant cette corde pour côté, perpendiculaire au plan XOY de l'astroïde. Calculer le volume du corps engendré par ces carrés.

1708. Un cercle variable passe par un point de l'axe OY, son centre décrit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et le plan du cercle est perpendiculaire au plan XOY. Calculer le volume du corps engendré par ce cercle.

1709. Le plan d'un triangle en mouvement reste perpendiculaire au diamètre immobile d'un cercle de rayon a. La base du triangle est une corde du cercle et son sommet glisse sur une droite parallèle au diamètre fixe située à la distance h du plan du cercle. Calculer le volume du corps (appelé conoïde) engendré par le déplacement de ce triangle de l'une des extrémités du diamètre à l'autre.

1710. Calculer le volume du corps limité par les cylindres $x^2+z^2=a^2$ et $y^2+z^2=a^2$.

1711. Calculer le volume du segment délimité par le plan $x=a$ et le paraboloïde elliptique $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$.

1712. Calculer le volume du corps limité par un hyperboloïde à une nappe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ et les plans $z=0$ et $z=h$.

1713. Calculer le volume de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

§ 10. Aire d'une surface de révolution

L'aire de la surface engendrée par la rotation autour de l'axe OX d'un arc de courbe $y=f(x)$ compris entre les points d'abscisse $x=a$ et $x=b$ est donnée par la formule

$$S_X=2\pi\int_a^b y\frac{ds}{dx}\,dx=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (1)$$

(ds est la différentielle de l'élément d'arc).

Lorsque les équations de la courbe sont données sous une autre forme, l'aire de la surface S_X est donnée par la formule (1) après y avoir effectué un changement de variable adéquat.

Exemple 1. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation autour de l'axe OX de la boucle de la courbe $9y^2=x(3-x)^2$ (fig. 54).

Solution. Pour la partie supérieure de la courbe, c'est-à-dire pour $0\leqslant x\leqslant 3$, on a $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. D'où la différentielle de

l'arc $ds = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx$. En vertu de la formule (1), l'aire de la surface est

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\pi.$$

E x e m p l e 2. Calculer l'aire de la surface obtenue par la rotation d'un arc de cycloïde $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ autour de son axe de symétrie (fig. 55).

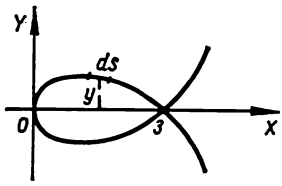


Fig. 54

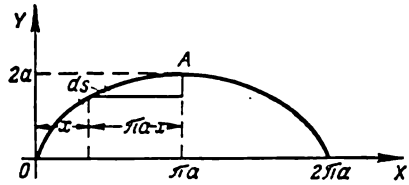


Fig. 55

S o l u t i o n. La surface cherchée est engendrée par la rotation de l'arc OA autour de la droite AB d'équation $x = \pi a$. En prenant y comme variable indépendante et en ayant en vue que l'axe de rotation AB est translatée de πa par rapport à l'axe OY, on a:

$$S = 2\pi \int_0^{2a} (\pi a - x)\frac{ds}{dx}\cdot dy.$$

En passant à la variable t, on a

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a\sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(\pi\sin\frac{t}{2} - t\sin\frac{t}{2} + \sin t\sin\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2\pi\cos\frac{t}{2} + 2t\cos\frac{t}{2} - 4\sin\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right)a^2.$$

1714. Les dimensions d'un miroir parabolique AOB sont indiquées sur la fig. 56. On demande de calculer l'aire de la surface de ce miroir.

1715. Calculer l'aire de la surface de la « quenouille » que l'on obtient par la rotation d'une demi-onde de sinusoïde $y = \sin x$ autour de l'axe OX.

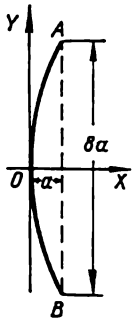


Fig. 56

1716. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de la partie de la tangentoïde $y = \operatorname{tg} x$ comprise entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ autour de l'axe OX.

1717. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation autour de l'axe OX de l'arc de courbe $y = e^{-x}$ compris entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = +\infty$.

1718. Calculer l'aire de la surface (appelée *cathénoïde*) engendrée par la rotation de l'arc de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ autour de l'axe OX compris entre les points d'abscisse de $x = 0$ à $x = a$.

1719. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ autour de l'axe OY.

1720. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc de courbe $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ autour de l'axe OX et compris entre les points d'ordonnées $y = 1$ et $y = e$.

1721*. Calculer l'aire de la surface du tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ autour de l'axe OX $(b > a)$.

1722. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour: 1) de l'axe OX; 2) de l'axe OY $(a > b)$.

1723. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation d'un arc de cycloïde $x = a(t - \sin t)$ et $y = a(1 - \cos t)$ autour: a) de l'axe OX; b) de l'axe OY; c) de la tangente à la cycloïde au point le plus élevé.

1724. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation autour de l'axe OX de la cardioïde

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t), \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t). \end{aligned}\right\}$$

1725. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ autour de l'axe polaire.

1726. Calculer l'aire de la surface engendrée par la rotation de la cardioïde $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ autour de l'axe polaire.

§ 11. Moments. Centre de gravité. Théorèmes de Guldin

1°. Moment statique. On appelle, par définition, *moment statique* par rapport à un axe l d'un point matériel A de masse m et se trouvant à la distance d de l'axe l la grandeur $M_l = md$.

Le *moment statique* par rapport à un axe l d'un système de n points matériels de masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$ se trouvant dans le même plan que l'axe et dont les distances à cet axe sont respectivement $d_1, d_2, \ldots, d_n$ est par définition la somme

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i, \tag{1}$$

en outre, les points situés d'un même côté de l'axe l sont pris avec le signe plus (+) et les autres avec le signe moins (—). D'une manière analogue, on définit le *moment statique d'un système de points* par rapport à un plan.

Si les masses sont distribuées continûment sur une ligne ou sur une figure du plan XOY, alors les moments statiques M_X et M_Y par rapport aux axes de coordonnées OX et OY s'expriment respectivement par des intégrales au lieu des sommes (1). Dans le cas de figures géométriques, la densité est supposée égale à l'unité.

En particulier: 1) pour une courbe $x = x(s)$, $y = y(s)$, où le paramètre s est la longueur de l'arc, on a

$$M_X = \int_0^L y(s)\,ds; \quad M_Y = \int_0^L x(s)\,ds \tag{2}$$

($ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ est la différentielle de l'arc);

2) pour une figure plane limitée par la courbe $y = y(x)$, l'axe OX et les deux droites verticales $x = a$ et $y = b$, on a

$$M_X = \frac{1}{2}\int_a^b y\,|y|\,dx; \quad M_Y = \int_a^b x\,|y|\,dx. \tag{3}$$

Exemple 1. Calculer les moments statiques par rapport aux axes OX et OY d'un triangle limité par les droites $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (fig. 57).

S o l u t i o n. Ici $y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. En appliquant les formules (3), on trouve

$$M_X = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{ab^2}{6}$$

et

$$M_Y = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{a^2 b}{6}.$$

2°. M o m e n t d'i n e r t i e. On appelle *moment d'inertie* par rapport à un axe l d'un point matériel de masse m distant de d de l'axe l le nombre $I_l = md^2$.

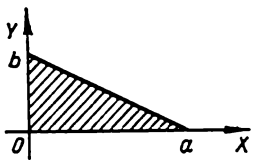


Fig. 57

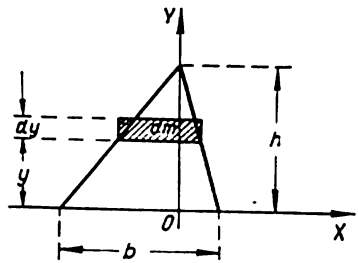


Fig. 58

On appelle *moment d'inertie* par rapport à un axe l d'un système de n points matériels de masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$ la somme

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2,$$

où $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont les distances des points à l'axe l. Dans le cas d'une masse continue, on prend l'intégrale correspondante à la place de la somme précédente.

E x e m p l e 2. Calculer le moment d'inertie d'un triangle de base b et de hauteur h par rapport à sa base.

S o l u t i o n. Faisons passer l'axe OX par la base du triangle et l'axe OY par la hauteur du triangle (fig. 58).

Partageons le triangle en tranches horizontales d'épaisseur infiniment petite dy jouant le rôle de masses élémentaires dm. D'après la similitude des triangles, on a

$$dm = b\,\frac{h-y}{h}\,dy$$

et

$$dI_X = y^2\,dm = \frac{b}{h}\,y^2(h-y)\,dy.$$

D'où

$$I_X = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y)\, dy = \frac{1}{12} bh^3.$$

3°. Centre de gravité. Les *coordonnées du centre de gravité* d'une figure plane (d'un arc de courbe ou d'une figure plane à deux dimensions) de masse M se calculent d'après les formules

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

où M_X et M_Y sont les moments statiques de la masse. Dans le cas de figures géométriques, la masse M est numériquement égale soit à la longueur de l'arc de courbe, soit à l'aire de la figure.

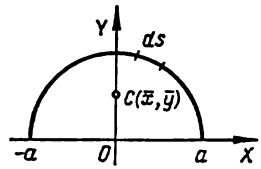


Fig. 59

Les coordonnées du centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ d'un arc de courbe plane $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ réunissant les points $A\ (a, f(a))$ et $B\ (b, f(b))$, sont données par les formules

$$\bar{x} = \frac{\int_A^B x\, ds}{s} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+(y')^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_A^B y\, ds}{s} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+(y')^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx}.$$

Les coordonnées du centre de gravité $(\bar{x}, \bar{y})$ d'un trapèze curviligne $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ sont données par les formules

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{S}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\, dx}{S},$$

où $S = \int_a^b y\, dx$ est l'aire de la figure.

On a des formules analogues pour les coordonnées du centre de gravité d'un corps.

Exemple 3. Déterminer le centre de gravité du demi-cercle $x^2 + y^2 = a^2$, $(y \geqslant 0)$ (fig. 59).

Solution. On a

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

et

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

D'où

$$M_Y = \int_{-a}^{a} x\,ds = \int_{-a}^{a} \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = 0,$$

$$M_X = \int_{-a}^{a} y\,ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2a^2,$$

$$M = \int_{-a}^{a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi a.$$

Par conséquent,

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2}{\pi}a.$$

4°. Théorèmes de Guldin.

Théorème 1. L'aire de la surface engendrée par la rotation d'un arc de courbe plane autour d'un axe se trouvant dans le même plan que la courbe sans intersection avec l'axe est égale au produit de la longueur de la courbe par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc de courbe.

Théorème 2. Le volume d'un corps engendré par la rotation d'une figure plane autour d'un axe se trouvant dans le plan de la figure et sans intersection avec la figure est égal au produit de l'aire de cette figure par la longueur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la figure.

1727. Calculer les moments statiques par rapport aux axes de coordonnées du segment de droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

compris entre les axes de coordonnées.

1728. Calculer les moments statiques d'un rectangle de côtés a et b par rapport à ses côtés.

1729. Calculer les moments statiques par rapport aux axes OX et OY et les coordonnées du centre de gravité du triangle limité par les droites $x + y = a$, $x = 0$ et $y = 0$.

1730. Calculer les moments statiques par rapport aux axes OX et OY et les coordonnées du centre de gravité de l'arc d'astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

situé dans le premier quart de plan.

1731. Calculer le moment statique de la circonférence

$$r = 2a \sin \varphi$$

par rapport à l'axe polaire.

1732. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'arc de chaînette

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

compris entre les points d'abscisses $x = -a$ et $x = a$.

1733. Déterminer le centre de gravité d'un arc de cercle de rayon a et d'angle au centre 2α.

1734. Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un arc de la cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

1735. Calculer les coordonnées du centre de gravité de a figure limitée par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et les axes de coordonnées ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

1736. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les courbes

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

1737. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par le premier arc de cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

et l'axe OX.

1738.** Calculer les coordonnées du centre de gravité de la demi-sphère de rayon a et de centre à l'origine des coordonnées et située au-dessus du plan XOY.

1739.** Calculer le centre de gravité d'un cône circulaire droit homogène de rayon de base r et de hauteur h.

1740.** Calculer le centre de gravité d'une demi-boule homogène de rayon a, de centre à l'origine des coordonnées et située au-dessus du plan XOY.

1741. Calculer le moment d'inertie d'une circonférence de rayon a par rapport à son diamètre.

1742. Calculer les moments d'inertie d'un rectangle de côtés a et b par rapport à ses côtés.

1743. Calculer le moment d'inertie d'un segment parabolique droit de base $2b$ et de hauteur h par rapport à son axe de symétrie.

1744. Calculer les moments d'inertie de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ par rapport à ses axes principaux.

1745.** Calculer le moment d'inertie polaire d'une couronne circulaire de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), c'est-à-dire le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par le centre de la couronne et qui est perpendiculaire à son plan.

1746.** Calculer le moment d'inertie d'un cône circulaire droit homogène de rayon R et de hauteur h par rapport à son axe.

1747.** Calculer le moment d'inertie d'une boule homogène de rayon a et de masse M par rapport à son diamètre.

1748. Calculer la surface et le volume du tore engendré par la rotation d'un cercle de rayon a autour d'un axe situé dans son plan et se trouvant à la distance b de son centre ($b > a$).

1749. a) Définir la position du centre de gravité de l'arc d'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ situé dans le premier quart de plan.

b) Déterminer le centre de gravité d'une figure limitée par les courbes $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2py$.

1750.** a) Définir le centre de gravité d'un demi-cercle en utilisant le théorème de Guldin.

b) Démontrer, en s'aidant du théorème de Guldin, que le centre de gravité d'un triangle se trouve à un tiers de la hauteur.

§ 12. Application des intégrales définies à la résolution de problèmes de physique

1°. Chemin parcouru par un point. Si un point se déplace sur une courbe et si la valeur absolue de sa vitesse $v = f(t)$ est une fonction donnée du temps t, le *chemin* parcouru par ce point pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est alors égal à

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$

Exemple 1. La vitesse d'un point est égale à

$$v = 0{,}1\ t^3 \text{ m/s}.$$

Calculer le chemin s parcouru par le point depuis le début du mouvement pendant le temps $T = 10$ s. Calculer la vitesse moyenne du mouvement pendant cet intervalle de temps.

Solution. On a

$$s = \int_0^{10} 0{,}1t^3\,dt = 0{,}1\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10} = 250 \text{ m}$$

et

$$v_{\text{moy}} = \frac{s}{T} = 25 \text{ m/s}.$$

2°. Travail d'une force. Si une force variable $X = f(x)$ agit dans la direction de l'axe OX, le *travail de cette force* sur le segment $[x_1, x_2]$ est égal à

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Exemple 2. Quel travail faut-il accomplir pour allonger un ressort de 6 cm si, pour une force de 1 kg, le ressort s'allonge de 1 cm ?

Solution. D'après la loi de Hooke, la force X kg allongeant le ressort de x_m est égale à $X = kx$, où k est un coefficient de proportionnalité. En prenant $x = 0{,}01$ m et $X = 1$ kg, on trouve $k = 100$ et, par conséquent, $X = 100\,x$.

D'où le travail cherché

$$A = \int_0^{0{,}06} 100\,x\,dx = 50\,x^2\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18 \text{ kgm}.$$

3°. Energie cinétique. L'*énergie cinétique* d'un point matériel de masse m et de vitesse v est donnée par la formule

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

L'*énergie cinétique* d'un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$, de vitesse respective $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est égale à

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (1)$$

On procède de la manière suivante pour calculer l'énergie cinétique d'un corps : on partage ce corps en parties élémentaires (pouvant être assimilées à des points matériels), puis on additionne l'énergie cinétique de ces parties élémentaires et un passage à la limite donne une intégrale à la place de la somme (1).

Exemple 3. Calculer l'énergie cinétique d'un cylindre circulaire homogène de densité δ, de rayon de la base R et de hauteur h, animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω autour de son axe.

S o l u t i o n. Pour masse élémentaire dm on prend la masse d'un cylindre creux de hauteur h, de rayon intérieur r et d'épaisseur dr (fig. 60). On a

$$dm = 2\pi r \cdot h\delta dr.$$

Puisque la vitesse linéaire de la masse dm est égale à $v = r\omega$, l'énergie cinétique élémentaire est

$$dK = \frac{v^2 dm}{2} = \pi r^3 \omega^2 h\delta\, dr.$$

D'où

$$K = \pi\omega^2 h\delta \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi\omega^2 \delta R^4 h}{4}.$$

4°. P r e s s i o n d' u n l i q u i d e. Pour déterminer l'intensité de la *pression d'un liquide* on a recours à la loi de Pascal, d'après laquelle la pression d'un liquide sur une figure S immergée à la profondeur h est égale à

$$P = \gamma h S,$$

où γ est le poids spécifique du fluide liquide.

E x e m p l e 4. Déterminer la pression exercée sur un demi-cercle de rayon r immergé verticalement dans l'eau de manière que son diamètre coïncide avec la surface de l'eau (fig. 61).

S o l u t i o n. Partageons le demi-cercle en tranches parallèles

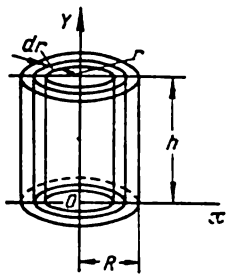


Fig. 60

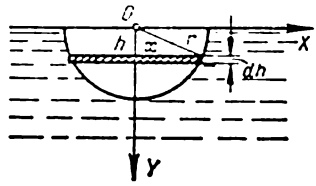


Fig. 61

à la surface de l'eau. L'aire d'un élément (en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur) se trouvant à la distance h de la surface est

$$ds = 2x\, dh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\, dh.$$

La pression exercée sur cet élément est

$$dP = \gamma h\, ds = 2\gamma h \sqrt{r^2 - h^2}\, dh,$$

où γ est le poids spécifique de l'eau, égal à l'unité.

D'où la pression totale

$$P = 2\int_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\, dh = -\frac{2}{3}(r^2 - h^2)\Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3.$$

1751. La vitesse d'un corps lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale v_0, en négligeant la résistance de l'air, est donnée par la formule

$$v = v_0 - gt,$$

où t est le temps écoulé et g l'accélération de la force de pesanteur. A quelle distance de la position initiale se trouve le corps t s après le lancement?

1752. La vitesse d'un corps lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale v_0 en tenant compte de la résistance de l'air est donnée par la formule

$$v = c \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{g}{c}t + \operatorname{arctg}\frac{v_0}{c}\right),$$

où t est le temps écoulé, g l'accélération de la force de pesanteur et c une constante. Déterminer l'altitude atteinte par ce corps.

1753. Un point de l'axe OX est soumis à des vibrations harmoniques autour de l'origine des coordonnées; sa vitesse est donnée par la formule

$$v = v_0 \cos \omega t,$$

où t est le temps, v_0 et ω sont des constantes.

Déterminer la loi des vibrations du point si pour $t = 0$ il occupe une position d'abscisse $x = 0$. Calculer la valeur moyenne de la grandeur absolue de la vitesse du point pendant une période.

1754. La vitesse de déplacement d'un point est $v = te^{-0,01t}$ m/s. Calculer l'espace parcouru par ce point à partir du début du mouvement jusqu'à l'arrêt complet.

1755. Une fusée s'élève verticalement vers le haut. En admettant que pour une poussée constante de la fusée l'accélération de la fusée croît, par suite de la diminution de son poids, d'après la loi $j = \frac{A}{a-bt}$ $(a - bt > 0)$, on demande de calculer la vitesse à un instant t quelconque sachant que sa vitesse initiale est égale à zéro. Calculer aussi l'altitude atteinte par la fusée à l'instant $t = t_1$.

1756*. Calculer le travail qu'il faut effectuer pour pomper l'eau d'une cuve circulaire verticale de rayon de base R et de hauteur H.

1757. Calculer le travail nécessaire pour pomper l'eau d'un récipient conique dont le sommet est tourné vers le bas, de rayon de base R et de hauteur H.

1758. Calculer le travail nécessaire pour pomper l'eau d'une chaudière demi-sphérique de rayon $R = 10$ m.

1759. Calculer le travail nécessaire pour pomper l'huile d'une citerne ayant la forme d'un cylindre d'axe horizontal, par une ouverture se trouvant à la partie supérieure, le poids spécifique de l'huile étant γ, la longueur de la citerne H et le rayon de la base R.

1760**. Calculer le travail nécessaire pour élever un corps de masse m à l'altitude h au-dessus de la surface de la Terre de rayon R. Calculer le travail lorsque le corps est éloigné jusqu'à l'infini.

1761**. Deux charges électriques $e_0 = 100$ CGSE et $e_1 = 200$ CGSE se trouvent sur l'axe OX et coïncident respectivement avec les points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ cm. Calculer le travail qu'il faut accomplir si la seconde charge est déplacée jusqu'au point $x_2 = 10$ cm.

1762**. Un cylindre muni d'un piston mobile de diamètre $D = 20$ cm et de longueur $l = 80$ cm est rempli de vapeur se trouvant sous la pression $p = 10$ kg/cm^2. Calculer le travail qu'il faut accomplir pour que, à température constante (processus isothermique), le volume de la vapeur diminue de moitié.

1763**. Calculer le travail effectué par la dilatation adiabatique d'une quantité d'air passant du volume initial $V_0 = 1$ m^3 et de pression $p_0 = 1$ kg/cm^2 au volume $V_1 = 10$ m^3.

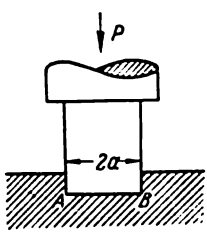


Fig. 62

1764**. Un arbre vertical de poids P et de rayon a est posé sur une crapaudine AB (fig. 62). La force de frottement de la superficie σ relativement petite de la base de l'arbre en contact avec le support est égale à $F = \mu p \sigma$, où $p = \text{const}$ est la pression de l'arbre sur le support rapportée à l'unité de surface, μ le coefficient de frottement. Calculer le travail de la force de frottement correspondant à un tour de l'arbre.

1765**. Calculer l'énergie cinétique d'un disque de masse M et de rayon R mû d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω autour de l'axe qui passe par le centre et qui est perpendiculaire à son plan.

1766. Calculer l'énergie cinétique d'un cône circulaire droit de masse M se trouvant en mouvement de rotation

à la vitesse angulaire ω autour de son axe si le rayon de la base est R et la hauteur H.

1767*. Quel est le travail exigé pour arrêter une boule métallique de rayon $R = 2$m mue d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\omega = 1000$ t/mn autour de son diamètre? (Le poids spécifique du fer est $\gamma = 7{,}8$ g/cm^3).

1768. Un triangle vertical de base b et de hauteur h est immergé dans l'eau de manière que son sommet soit en bas et que sa base coïncide avec la surface de l'eau. Déterminer la pression de l'eau.

1769. Une digue verticale a la forme d'un trapèze. Calculer la pression exercée par l'eau sur la digue sachant que la base supérieure de cette digue est $a = 70$ m, la base inférieure $b = 50$ m et la hauteur $h = 20$ m.

1770. Calculer la pression d'un fluide de poids spécifique γ exercée sur une ellipse verticale d'axes $2a$ et $2b$ dont le centre est immergé dans ce fluide et se trouve au niveau h; en outre, le grand axe $2a$ est parallèle au niveau de la surface ($h \geqslant b$).

1771. Calculer la pression exercée par l'eau sur un cône circulaire vertical de rayon de base R et de hauteur H immergé dans l'eau de manière que le sommet soit dirigé vers le bas et que la base soit parallèle à la surface de l'eau.

Problèmes variés

1772. Calculer la masse d'une tige de longueur $l = 100$ cm si la densité linéaire de la tige à la distance x cm de l'une de ses extrémités est égale à

$$\delta = 2 + 0{,}001\ x^2 \text{ g/cm}.$$

1773. D'après des données empiriques, la chaleur spécifique de l'eau se trouvant à la température t °C ($0 \leqslant t \leqslant 100°$) est égale à

$$C = 0{,}9983 - 5{,}184 \cdot 10^{-5} t + 6{,}912 \cdot 10^{-7} t^2.$$

Quelle quantité de chaleur faut-il employer pour élever la température d'un gramme d'eau de 0 °C à 100 °C?

1774. Le vent exerce une pression uniforme de pG/cm^2 sur une porte de largeur b cm et de hauteur h cm. Déterminer le moment des forces de pression du vent qui ferait tourner la porte sur ses charnières.

1775. Déterminer la force d'attraction qu'exerce une tige matérielle de longueur l et de masse M sur un point matériel de masse m se trouvant sur une même droite avec la tige et à la distance a de l'une de ses extrémités.

1776**. Lors de l'écoulement laminaire permanent (à jet) d'un fluide dans un tuyau de section circulaire de rayon a la vitesse d'écoulement v au point distant de r de l'axe du tuyau est donnée par la formule

$$v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2),$$

où p est la différence de pression du fluide aux extrémités du tuyau, μ le coefficient de viscosité, l la longueur du tuyau. Déterminer le débit du liquide, c'est-à-dire la quantité Q du fluide écoulé par une section transversale du tuyau pendant l'unité de temps.

1777*. Les conditions sont les mêmes que dans l'exercice n° 1776, mais le tuyau est à section rectangulaire, la base a est très grande par rapport à la hauteur $2b$. Dans ce cas, la vitesse d'écoulement v au point M (x, y) est donnée par la formule

$$v = \frac{p}{2\mu l}[b^2 - (b - y)^2].$$

Déterminer l'écoulement Q du liquide.

1778**. Pour l'étude des propriétés dynamiques d'une automobile, on a fréquemment recours à un diagramme d'un type spécial : on porte sur l'axe des abscisses la vitesse v et sur l'axe des ordonnées des grandeurs égales à l'inverse de l'accélération a. Démontrer que l'aire S limitée par un arc de ce graphique, les deux droites $v = v_1$ et $v = v_2$ et l'axe des abscisses est numériquement égale au temps nécessaire pour que la vitesse de l'automobile passe de v_1 à v_2 (temps de démarrage).

1779. Une poutre horizontale de longueur l se trouve en équilibre sous l'action d'une charge verticale dirigée vers le bas uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre et des réactions aux appuis A et B $\left(A = B = \frac{Q}{2}\right)$ dirigées verticalement vers le haut. Déterminer le moment de flexion M_x de la section transversale d'abscisse x, c'est-à-dire le moment par rapport au point P d'abscisse x, de toutes les forces agissant sur la partie AP de la poutre.

1780. Une poutre horizontale de longueur l se trouve en équilibre sous l'action des réactions aux appuis A et B et d'une charge répartie sur toute la longueur de la poutre d'intensité $q = kx$, où x est la distance comptée à partir de l'extrémité gauche de la poutre, k un coefficient constant. Déterminer le moment de flexion M_x à la section x.

N o t a. On appelle intensité d'une distribution de charge la charge (la force) par unité de longueur.

1781*. Déterminer la quantité de chaleur engendrée dans un conducteur de résistance R par un courant alternatif sinusoïdal

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right)$$

pendant le temps T.

CHAPITRE VI

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

§ 1. Notions fondamentales

1°. Notion de fonction de plusieurs variables. On dit que la grandeur variable z est une *fonction* uniforme des deux variables x, y, si pour chaque ensemble de valeurs (x, y) du domaine donné il correspond une valeur unique déterminée pour z. Les variables x, y s'appellent variables *indépendantes*. La dépendance fonctionnelle est notée comme suit:

$$z = f(x, y).$$

On définit de manière analogue les fonctions de trois variables et plus.

Exemple 1. Exprimer le volume V d'un cône en fonction de sa génératrice x et du rayon de sa base y.

Solution. On sait de la géométrie que le volume du cône est

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

où h est la hauteur du cône. Mais $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Par conséquent,

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

C'est là la dépendance fonctionnelle que l'on cherchait.

La valeur de la fonction $z = f(x, y)$ au point $P(a, b)$, c'est-à-dire pour $x = a$ et $y = b$, est notée $f(a, b)$ ou $f(P)$. La représentation géométrique d'une fonction $z = f(x, y)$ dans un système de coordonnées rectangulaires X, Y, Z est en général une surface (fig. 63).

Exemple 2. Calculer $f(2, -3)$ et $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ si $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Solution. En substituant $x = 2$ et $y = -3$, on trouve

$$f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = -\frac{13}{12}.$$

En substituant $x = 1$ et en remplaçant y par $\frac{y}{x}$, on trouve

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1 \left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

c'est-à-dire $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$.

2°. Domaine d'existence d'une fonction. On entend par *domaine d'existence* (ou de *définition*) d'une fonction $z = f(x, y)$ l'ensemble des points (x, y) du plan XOY en lesquels la fonction donnée est définie (c'est-à-dire prend des valeurs réelles définies). Dans les cas simples, le domaine d'existence d'une fonction est une partie finie ou infinie du plan des coordonnées XOY limitée par une ou plusieurs courbes (frontière du domaine).

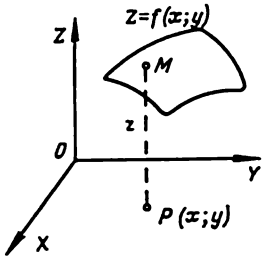


Fig. 63

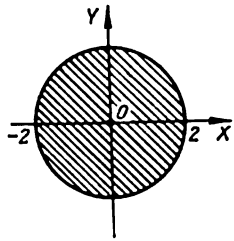


Fig. 64

De même, pour les fonctions de trois variables $u = f(x, y, z)$ le domaine d'existence sera un domaine de l'espace $OXYZ$.

Exemple 3. Déterminer le domaine d'existence de la fonction

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Solution. La fonction possède des valeurs réelles si $4 - x^2 - y^2 > 0$ ou si $x^2 + y^2 < 4$. Les points intérieurs à la circonférence de rayon 2 et de centre à l'origine des coordonnées satisfont à la dernière inégalité. Le domaine d'existence de la fonction est donc l'intérieur du cercle (fig. 64).

Exemple 4. Déterminer le domaine d'existence de la fonction

$$z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Solution. Le premier terme de la fonction est défini pour $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ ou pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Le second terme possède des valeurs réelles si $xy \geqslant 0$, c'est-à-dire dans les deux cas suivants: pour $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ ou pour $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$ Le domaine d'existence de cette fonction est représenté sur la figure 65, il contient la frontière du domaine.

3°. Lignes et surfaces de niveau d'une fonction. On appelle *ligne du niveau* d'une fonction $z = f(x, y)$ la courbe $f(x, y) = C$ du plan XOY sur laquelle la fonction prend une même

valeur $z = C$ (d'ordinaire on indique sur les figures la valeur de la constante).

On appelle *surface de niveau* d'une fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$ la surface $f(x, y, z) = C$ sur laquelle la fonction prend une valeur constante $u = C$.

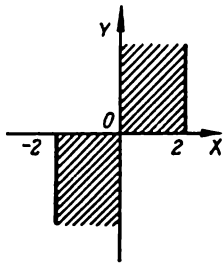


Fig. 65

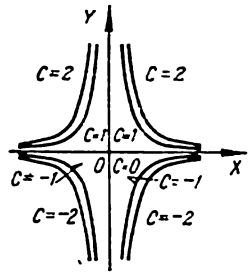


Fig. 66

E x e m p l e 5. Construire la ligne de niveau de la fonction $z = x^2y$.

S o l u t i o n. L'équation de la ligne de niveau est de la forme $x^2y = C$ ou $y = \frac{C}{x^2}$. En faisant $C = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, on obtient la famille des lignes de niveau (fig. 66).

1782. Exprimer le volume V d'une pyramide régulière carrée en fonction de sa hauteur x et de son arête latérale y.

1783. Exprimer la surface latérale S d'une pyramide régulière hexagonale tronquée en fonction des côtés x et y des bases et de sa hauteur z.

1784. Calculer $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $f(1, -1)$ si

$$f(x, y) = xy + \frac{x}{y}.$$

1785. Calculer $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x, y)}$, si $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.

1786. Calculer les valeurs prises par la fonction

$$f(x, y) = 1 + x - y$$

sur la parabole $y = x^2$ et tracer le graphique de la fonction

$$F(x) = f(x, x^2).$$

1787. Calculer les valeurs de la fonction

$$z=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$$

pour les points de la circonférence $x^2+y^2=R^2$.

1788*. Déterminer la fonction $f(x)$ si

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\ (y>0).$$

1789*. Déterminer la fonction $f(x, y)$ si

$$f(x+y,\ x-y)=xy+y^2.$$

1790*. Soit $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$. Déterminer les fonctions f et z si $z=x$ pour $y=1$.

1791**. Soit $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$. Déterminer la fonction f et z si $z=\sqrt{1+y^2}$ pour $x=1$.

1792. Déterminer et représenter les domaines d'existence des fonctions suivantes:

a) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

b) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$;

c) $z=\ln(x+y)$;

d) $z=x+\arccos y$;

e) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

f) $z=\arcsin\frac{y}{x}$;

g) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;

h) $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y)^2}\ (a>0)$;

i) $z=\sqrt{y\sin x}$;

j) $z=\ln(x^2+y)$;

k) $z=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+x^2y^2}$;

l) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$;

m) $z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

n) $z=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y}$;

o) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

1793. Déterminer les domaines d'existence des fonctions suivantes de trois variables:

a) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

b) $u=\ln(xyz)$;

c) $u=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$;

d) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

1794. Construire les lignes de niveau des fonctions données et expliquer le caractère des surfaces représentatives de ces fonctions :

a) $z=x+y$; d) $z=\sqrt{xy}$; g) $z=\frac{y}{x^2}$;

b) $z=x^2+y^2$; e) $z=(1+x+y)^2$; h) $z=\frac{y}{\sqrt{x}}$;

c) $z=x^2-y^2$; f) $z=1-|x|-|y|$; i) $z=\frac{2x}{x^2+y^2}$.

1795. Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes :

a) $z=\ln(x^2+y)$; d) $z=f(y-ax)$;

b) $z=\arcsin xy$; e) $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

c) $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

1796. Déterminer les surfaces de niveau des fonctions de trois variables:

a) $u=x+y+z$,

b) $u=x^2+y^2+z^2$,

c) $u=x^2+y^2-z^2$.

§ 2. Continuité

1°. Limite d'une fonction. Le nombre A est appelé *limite de la fonction* $z=f(x, y)$, le point $P'(x, y)$ tendant vers le point $P(a, b)$ si, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe un nombre $\delta>0$ tel que pour $0<\rho<\delta$ où $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ est la distance entre les points P et P', l'inégalité

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

est vérifiée.

Dans ce cas, on écrit:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A.$$

2°. Continuité et points de discontinuité. La fonction $z = f(x, y)$ est dite *continue au point* $P(a, b)$, si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = f(a, b).$$

Une fonction continue en chaque point d'un domaine est dite *continue dans ce domaine.*

Les conditions de continuité pour une fonction $f(x, y)$ peuvent ne pas être vérifiées aussi bien en des points isolés (*points de discontinuité isolés*) qu'en des points formant une ou plusieurs courbes (*courbe de discontinuité*) et parfois en des points de figures géométriques plus compliquées.

Exemple 1. Trouver les points de discontinuité de la fonction

$$z = \frac{xy+1}{x^2-y}.$$

Solution. La fonction n'est pas déterminée lorsque le dénominateur s'annule. Or $x^2 - y = 0$ ou $y = x^2$ est l'équation d'une parabole. Par conséquent, pour la fonction donnée, la parabole $y = x^2$ est une courbe de discontinuité.

1797*. Trouver les limites des fonctions suivantes:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to k}} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1798. Etudier la continuité de la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{pour } x^2+y^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

1799. Déterminer les points de discontinuité des fonctions suivantes:

a) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; c) $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$;

b) $z = \frac{1}{(x-y)^2}$; d) $z = \cos\frac{1}{xy}$.

1800.* Montrer que la fonction

$$z=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{pour } x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & \text{pour } x=y=0, \end{cases}$$

est continue séparément par rapport à chacune des variables x et y mais n'est pas continue au point (0, 0) par rapport à l'ensemble de ces variables.

§ 3. Dérivées partielles

1°. Définition des dérivées partielles. Si $z=f(x, y)$, alors en supposant, par exemple, y constant on trouve la dérivée

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f'_x(x, y)$$

que l'on appelle *dérivée partielle* de la fonction z par rapport à la variable x. On définit et on note la dérivée partielle de la fonction z par rapport à la variable y d'une manière analogue. Il est évident que pour trouver les dérivées partielles on peut user des formules ordinaires de dérivation.

Exemple 1. Calculer les dérivées partielles de la fonction

$$z=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

Solution. En considérant y comme une grandeur constante, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

De même, en considérant x constant, on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Exemple 2. Calculer les dérivées partielles de la fonction de trois variables

$$u=x^3y^2z+2x-3y+z+5.$$

Solution.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1.$$

2°. Théorème d'Euler. On dit que la fonction $f(x, y)$ est une fonction *homogène* de degré n si pour tout nombre réel k l'égalité

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$$

est vérifiée. Une fonction rationnelle sera homogène si tous ses termes sont du même degré.

Une fonction homogène dérivable de degré n satisfait à la relation (*théorème d'Euler*)

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

Calculer les dérivées partielles des fonctions :

1801. $z = x^2 + y^2 - 3axy$.

1802. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

1803. $z = \frac{y}{x}$.

1804. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1805. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1806. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

1807. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1808. $z = x^y$.

1809. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$.

1810. $z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

1811. $z = \ln\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

1812. $u = (xy)^z$.

1813. $u = z^{xy}$.

1814. Calculer $f'_x(2, 1)$ et $f'_y(2, 1)$ si $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

1815. Calculer $f'_x(1, 2, 0)$, $f'_y(1, 2, 0)$, $f'_z(1, 2, 0)$, si

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z).$$

Vérifier sur les exemples n°s 1816-1819 le théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes.

1816. $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

1817. $z = \frac{x}{x^2+y^2}$.

1818. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

1819. $f(x, y) = \ln\frac{y}{x}$.

1820. Calculer $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1821. Calculer $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ si $x = r\cos\varphi$ et $y = r\sin\varphi$.

1822. Montrer que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$ si

$$z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

1823. Montrer que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ si

$$z = xy + xe^{\frac{y}{x}}.$$

1824. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ si

$$u = (x - y)(y - z)(z - x).$$

1825. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$ si

$$u = x + \frac{x - y}{y - z}.$$

1826. Déterminer $z = z(x, y)$ si

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

1827. Déterminer $z = z(x, y)$ sachant que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x} \text{ et } z(x, y) = \sin y \text{ pour } x = 1.$$

1828. On fait passer par le point M (1, 2, 6) de la surface $z = 2x^2 + y^2$ des plans parallèles aux plans de coordonnées XOZ et YOZ. Déterminer les angles formés avec les axes de coordonnées et les tangentes aux sections obtenues en leur point commun M.

1829. L'aire d'un trapèze de bases a, b et de hauteur h est égale à $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Calculer $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ en s'aidant de la figure, expliquer leur sens géométrique.

1830*. Montrer que la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

possède des dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ au point (0, 0), bien que cette fonction soit discontinue en ce point. Construire la fonction au voisinage du point (0, 0).

§ 4. Différentielle totale d'une fonction

1°. Accroissement total d'une fonction. *L'accroissement total* d'une fonction $z = f(x, y)$ est la différence

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2°. Différentielle totale d'une fonction. *La différentielle totale* d'une fonction $z = f(x, y)$ est, par définition, la partie principale de l'accroissement total Δz linéaire par rapport aux accroissements Δx et Δy des variables.

La différence entre l'accroissement total et la différentielle totale d'une fonction est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

A priori, une fonction possède une différentielle totale dans le cas où ses dérivées partielles sont continues. Si une fonction possède une différentielle totale, elle est dite *différentiable*. Les différentielles des variables indépendantes coïncident avec leur accroissement, c'est-à-dire $dx = \Delta x$ et $dy = \Delta y$. La différentielle totale de la fonction $z = f(x, y)$ se calcule d'après la formule

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

De même, la différentielle totale d'une fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$ se calcule d'après la formule

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Exemple 1. Trouver l'accroissement total et la différentielle totale de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2.$$

Solution. $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2$; $\Delta f(x, y) = [(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2 - (x^2+xy-y^2) = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 + x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\Delta y - 2y\cdot\Delta y + \Delta y^2 = [(2x+y)\Delta x + (x-2y)\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2)$.

Ici, l'expression $df = (2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y$ est la différentielle totale de la fonction; quant à $(\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2)$, c'est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Exemple 2. Trouver la différentielle totale de la fonction

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Solution. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3°. Application de la différentielle totale au calcul approché. Pour des $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ suffisamment petits et par suite pour $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ suffisamment petit, pour une fonction différentiable $z=f(x, y)$, l'égalité approchée $\Delta z\approx dz$ a lieu, ou

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Exemple 3. La hauteur d'un cône est $H=30$ cm, le rayon de sa base est $R=10$ cm. Etudier la variation du volume du cône si on augmente H de 3 mm et on diminue R de 1 mm.

Solution. Le volume du cône est $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Remplaçons la variation du volume approximativement par sa différentielle

$$\Delta V\approx dV=\frac{1}{3}\pi(2RH\,dR+R^2\,dH)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi(-2\cdot10\cdot30\cdot0{,}1+100\cdot0{,}3)=-10\pi\approx-31{,}4\text{ cm}^3.$$

Exemple 4. Calculer approximativement $1{,}02^{3{,}01}$.

Solution. Considérons la fonction $z=x^y$. Le nombre cherché peut être considéré comme la valeur accrue de cette fonction à partir de $x=1$, $y=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$. La valeur initiale de la fonction est $z=1^3=1$,

$$\Delta z\approx dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y=3\cdot1\cdot0{,}02+1\cdot\ln1\cdot0{,}01=0{,}06.$$

Par conséquent, $1{,}02^{3{,}01}\approx1+0{,}06=1{,}06$.

1831. Déterminer l'accroissement total et la différentielle totale au point (1, 2) de la fonction $f(x, y)=x^2y$; comparez-les si

a) $\Delta x=1$, $\Delta y=2$; b) $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

1832. Montrer que pour les fonctions u et v de plusieurs variables (par exemple, de deux) les règles usuelles de différentiations sont vraies:

a) $d(u+v)=du+dv$; b) $d(uv)=u\,dv+v\,du$;

c) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes:

1833. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

1834. $z = x^2 y^3$.

1835. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

1836. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.

1837. $z = yx^y$.

1838. $z = \ln (x^2 + y^2)$.

1839. $f(x, y) = \ln \left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

1840. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

1841. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

1842. Calculer $df(1, 1)$, si $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$.

1843. $u = xyz$.

1844. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1845. $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$.

1846. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2}$.

1847. Calculer $df(3, 4, 5)$, si $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1848. L'un des côtés d'un rectangle est $a = 10$ cm, l'autre $b = 24$ cm. Etudier la variation de la diagonale l du rectangle si le côté a s'allonge de 4 mm et le côté b se raccourcit de 1 mm. Calculer la grandeur approchée de la variation et comparer avec la valeur exacte.

1849. Une caisse fermée de dimensions extérieures 10 cm, 8 cm et 6 cm est faite en contre-plaqué de 2 mm d'épaisseur. Déterminer approximativement le volume de matériel utilisé pour faire la caisse.

1850*. L'angle au centre d'un secteur circulaire est 80°. On désire le diminuer de 1°. De combien faut-il allonger le rayon du secteur pour que son aire reste inchangée si la longueur initiale du rayon était de 20 cm?

1851. Calculer approximativement:

a) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$; b) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$;

c) $\sin 32° \cdot \cos 59°$ (pour la convertion des degrés en radians et pour le calcul de sin 60° prendre trois chiffres après la virgule; arrondir le dernier chiffre).

1852. Montrer que l'erreur relative d'un produit est approximativement égale à la somme des erreurs relatives des facteurs.

1853. Lors de la mesure en un lieu d'un triangle ABC, on a obtenu les données suivantes : côté $a = 100$ m $\pm$ 2 m, côté $b = 200$ m $\pm$ 3 m, angle $C = 60° \pm 1°$. Avec quel degré de précision peut-on calculer le côté c?

1854. La période d'oscillation T d'un pendule est donnée par la formule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

où l est la longueur du pendule et g l'accélération de la force de pesanteur. Déterminer l'erreur faite pendant la détermination de T résultant de petites erreurs $\Delta l = \alpha$ et $\Delta g = \beta$ effectuées en mesurant l et g.

1855. La distance entre les points P_0 (x_0, y_0) et P (x, y) est égale à ρ et l'angle formé par le vecteur $\overline{P_0P}$ et l'axe OX est égal à α. De combien variera l'angle α, si le point P, pour P_0 fixe, occupe la position P_1 $(x + dx,\ y + dy)$?

§ 5. Dérivation des fonctions composées

1°. Cas d'une variable indépendante. Si $z = f(x, y)$ est une fonction dérivable des variables x et y qui, à leur tour, sont des fonctions dérivables d'une variable indépendante t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

la dérivée de la fonction composée $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ peut être calculée d'après la formule

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

En particulier, si t coïncide avec une des variables, par exemple avec x, alors la dérivée « totale » de la fonction z par rapport à x est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Exemple 1. Calculer $\frac{dz}{dt}$, si

$$z = e^{3x+2y}, \quad \text{où} \quad x = \cos t, \quad y = t^2.$$

Solution. D'après la formule (1), on a

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y} \cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y} \cdot 2 \cdot 2t = e^{3x+2y}(4t - 3\sin t) =$$
$$= e^{3\cos t + 2t^2}(4t - 3\sin t)$$

Exemple 2. Calculer la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x}$ et la dérivée totale $\frac{dz}{dx}$, si

$$z = e^{xy}, \quad \text{où} \quad y = \varphi(x).$$

Solution. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$.

D'après la formule (2), on trouve

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x).$$

2°. Cas de plusieurs variables indépendantes. Si z est une fonction composée de plusieurs variables indépendantes, par exemple $z = f(x, y)$ où $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u et v sont des variables indépendantes), alors les dérivées partielles de z par rapport à u et v s'expriment de la manière suivante

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4}$$

Dans tous les cas considérés, la formule

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

est vraie (*propriété d'invariance de la différentielle totale*).

Exemple 3. Calculer $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ si

$$z = f(x, y) \text{ où } x = uv, \ y = \frac{u}{v}.$$

Solution. En appliquant les formules (3) et (4), on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y)\,v + f'_y(x, y)\frac{1}{v}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)\,u - f'_y(x, y)\frac{u}{v^2}.$$

Exemple 4. Montrer que la fonction $z = \varphi(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

S o l u t i o n. La fonction φ dépend de x et y par l'intermédiaire de la variable intermédiaire $x^2 + y^2 = t$, donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2+y^2)\cdot 2x$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2+y^2)\cdot 2y.$$

En substituant les dérivées partielles dans le premier membre de l'équation, on a

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y\varphi'(x^2+y^2)\,2x - x\varphi'(x^2+y^2)\,2y =$$
$$= 2xy\,\varphi'(x^2+y^2) - 2xy\,\varphi'(x^2+y^2) \equiv 0,$$

c'est-à-dire la fonction z vérifie l'équation donnée.

1856. Calculer $\frac{dz}{dt}$ si

$$z = \frac{x}{y}, \text{ où } x = e^t,\ y = \ln t.$$

1857. Calculer $\frac{du}{dt}$ si

$$u = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}, \text{ où } x = 3t^2,\ y = \sqrt{t^2+1}.$$

1858. Calculer $\frac{du}{dt}$ si

$$u = xyz, \text{ où } x = t^2+1,\ y = \ln t,\ z = \operatorname{tg} t.$$

1859. Calculer $\frac{du}{dt}$ si

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ où } x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = H.$$

1860. Calculer $\frac{dz}{dx}$ si

$$z = u^v, \text{ où } u = \sin x,\ v = \cos x.$$

1861. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{dz}{dx}$ si

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ avec } y = x^2.$$

1862. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{dz}{dx}$ si

$$z = x^y, \text{ où } y = \varphi(x).$$

1863. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$$z = f(u, v), \text{ où } u = x^2 - y^2, \ v = e^{xy}.$$

1864. Calculer $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ si

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \text{ où } x = u \sin v, \ y = u \cos v.$$

1865. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$$z = f(u), \text{ où } u = xy + \frac{y}{x}.$$

1866. Montrer que si

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \text{ où } x = R \cos \varphi \cos \psi,$$
$$y = R \cos \varphi \sin \psi, \qquad z = R \sin \varphi,$$

alors

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0.$$

1867. Calculer $\frac{du}{dx}$ si

$$u = f(x, y, z), \text{ où } y = \varphi(x), \ z = \psi(x, y).$$

1868. Montrer que si

$$z = f(x + ay),$$

où f est une fonction dérivable, alors

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}.$$

1869. Montrer que la fonction

$$w = f(u, v),$$

où $u = x + at$, $v = y + bt$, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}.$$

1870. Montrer que la fonction

$$z = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

1871. Montrer que la fonction

$$z=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

vérifie l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z.$$

1872. Montrer que l'équation

$$z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

vérifie l'équation

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz.$$

1873. L'un des côtés d'un rectangle $x = 20$ m s'allonge à la vitesse de 5 m/s, l'autre $y = 30$ m se raccourcit à la vitesse de 4 m/s. Avec quelle vitesse le périmètre et l'aire du rectangle varient-ils?

1874. Les équations du mouvement d'un point matériel sont

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

Avec quelle vitesse augmente la distance d'un point à l'origine des coordonnées?

1875. Deux bateaux appareillent simultanément du point A en se dirigeant l'un vers le nord, l'autre vers le nord-est. Les vitesses de déplacement des bateaux sont 20 km/h et 40 km/h. Avec quelle vitesse la distance qui les sépare croît-elle?

§ 6. Dérivée dans une direction donnée et gradient d'une fonction

1°. Dérivée d'une fonction dans une direction donnée. La *dérivée* d'une fonction $z = f(x, y)$ *dans la direction donnée* $\vec{l} = \overrightarrow{PP_1}$ est

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{P_1P\to 0}\frac{f(P_1)-f(P)}{P_1P},$$

où $f(P)$ et $f(P_1)$ sont les valeurs de la fonction aux points P et P_1. Si z est une fonction différentiable, on a la formule

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \qquad (1)$$

où α est l'angle formé par le vecteur $\vec{l}$ et l'axe OX (fig. 67).

De même, on définit la dérivée dans une direction donnée $\vec{l}$ d'une fonction de trois variables $u=f(x, y, z)$. Dans ce cas

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

où α, β, γ sont les angles formés par la direction $\vec{l}$ et les axes de coordonnées respectifs. La dérivée dans une direction donnée caractérise la vitesse de variation de cette fonction dans cette direction.

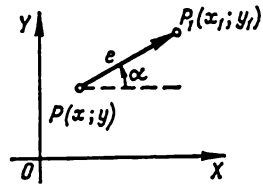


Fig. 67

Exemple 1. Calculer la dérivée de la fonction $z=2x^2-3y^2$ dans une direction formant avec l'axe OX un angle de 120° et issue du point P (1, 0).

Solution. Calculons les dérivées partielles de la fonction donnée au point P:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P=4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-6y; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P=0.$$

Ici

$$\cos\alpha=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En appliquant la formule (1), on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial l}=4\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2.$$

Le signe moins montre que la fonction au point donné et dans la direction donnée décroît.

2°. Gradient d'une fonction. On appelle *gradient* d'une fonction $z=f(x, y)$ le vecteur dont les projections sur les axes de coordonnées sont les dérivées partielles correspondantes de la fonction donnée

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \qquad (3)$$

La dérivée d'une fonction dans la direction $\vec{l}$ est liée au gradient de cette fonction par la formule suivante:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{proj}_{\vec{l}} \text{grad } z,$$

c'est-à-dire que, dans la direction donnée, elle est égale à la projection du gradient sur la direction de dérivation.

Le gradient d'une fonction est en chaque point dirigé suivant la normale à la ligne de niveau correspondante. La direction du gradient d'une fonction en un point donné est la direction suivant laquelle la fonction a la plus grande vitesse de croissance en ce point, c'est-à-dire pour $\vec{l} = \text{grad } z$ la dérivée $\frac{\partial z}{\partial l}$ atteint sa plus grande valeur, qui est égale à

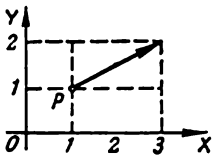


Fig. 68

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

De même, on définit le gradient d'une fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4)$$

Le gradient d'une fonction de trois variables est en chaque point dirigé suivant la normale à la surface de niveau passant par ce point.

E x e m p l e 2. Calculer et construire le gradient de la fonction $z = x^2y$ au point P (1, 1).

S o l u t i o n. Calculons les dérivées partielles et leurs valeurs au point P.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

Par conséquent, grad $z = 2\vec{i} + \vec{j}$ (fig. 68).

1876. Calculer la dérivée de la fonction $z = x^2 - xy - 2y^2$ au point P (1, 2) dans une direction formant avec l'axe OX un angle de 60° et issue du point P (1, 2).

1877. Calculer la dérivée de la fonction $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ au point M (1, 2) dans la direction joignant ce point au point N (4, 6).

1878. Calculer la dérivée de la fonction $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ au point P (1, 1) suivant la bissectrice du premier quadrant.

1879. Calculer la dérivée de la fonction $u = x^2 - 3yz + 5$ au point M (1, 2, 1) dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.

1880. Calculer la dérivée de la fonction $u = xy + yz + zx$ au point M (2, 1, 3) dans la direction joignant ce point au point N (5, 5, 15).

1881. Calculer la dérivée de la fonction $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ à l'origine des coordonnées et dans une direction formant avec les axes de coordonnées x, y, z les angles α, β, γ.

1882. Le point en lequel la dérivée suivant une direction arbitraire est égale à zéro s'appelle *point stationnaire* de cette fonction. Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes:

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

1883. Montrer que la dérivée de la fonction $z = \frac{y^2}{x}$ en tout point de l'ellipse $2x^2 + y^2 = C^2$ dans la direction de la normale à l'ellipse est égale à zéro.

1884. Calculer grad z au point (2, 1) si

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1885. Calculer grad z au point (5, 3), si

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

1886. Calculer grad u au point (1, 2, 3) si $u = xyz$.

1887. Déterminer la grandeur et la direction de grad u au point (2, —2, 1) si

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

1888. Calculer l'angle formé par les gradients de la fonction $z = \ln \frac{y}{x}$ aux points $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et B (1, 1).

1889. Déterminer la plus grande pente de la surface

$$z = x^2 + 4y^2$$

au point (2, 1, 8).

1890. Construire le champ de vecteurs du gradient des fonctions suivantes:

a) $z=x+y$; c) $z=x^2+y^2$;

b) $z=xy$; d) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

§ 7. Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs

1°. Dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les dérivées *partielles du deuxième ordre* de la fonction $z=f(x, y)$ sont les dérivées partielles de ses dérivées partielles premières.

Pour les dérivées du second ordre, on emploie les notations suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x, y), \text{ etc.}$$

De même, on définit et on désigne les dérivées partielles d'ordres supérieurs au second.

Si on a à calculer des dérivées partielles continues, alors *le résultat de la dérivation successive ne dépend pas de l'ordre de dérivation.*

Exemple 1. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Solution. Calculons d'abord les dérivées partielles premières:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Calculons les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Remarquons que la dérivée partielle dite « mixte » peut être calculée autrement, à savoir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2°. Différentielles d'ordres supérieurs. La *différentielle du second ordre* de la fonction $z=f(x, y)$ est la différentielle de la différentielle (du premier ordre) de cette fonction

$$d^2z = d\,(dz).$$

De même, on définit les différentielles d'ordres supérieurs à deux de la fonction $z=f(x, y)$, par exemple:

$$d^3z = d\,(d^2z),$$

et, en général,

$$d^nz = d\,(d^{n-1}z).$$

Si $z=f(x, y)$, où x et y sont des variables indépendantes, la différentielle du second ordre de la fonction z se calcule d'après la formule

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \qquad (1)$$

En général, on a la formule symbolique

$$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$$

qui, formellement, se développe comme le binôme de Newton.

Si $z=f(x, y)$, où les variables x et y sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes, on a

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y. \qquad (2)$$

Si x et y sont des variables indépendantes, alors $d^2x=0$, $d^2y=0$ et la formule (2) coïncide identiquement avec la formule (1).

Exemple 2. Calculer les différentielles totales du 1er et du 2ème ordre de la fonction

$$z = 2x^2 - 3xy - y^2.$$

Solution. 1ère méthode. On a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-3x-2y.$$

Donc

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy=(4x-3y)\,dx-(3x+2y)\,dy.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2,$$

d'où découle que

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 = 4dx^2 - 6dx\,dy - 2dy^2.$$

2ème méthode. En différentiant, on trouve

$$dz = 4x\,dx - 3\,(y\,dx + x\,dy) - 2y\,dy = (4x - 3y)\,dx - \\ - (3x + 2y)\,dy.$$

En différentiant encore une fois et en tenant compte que dx et dy ne dépendent pas de x et y, on trouve

$$d^2z = (4dx - 3dy)\,dx - (3dx + 2dy)\,dy = 4dx^2 - 6dx\,dy - 2dy^2.$$

1891. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

1892. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si

$$z = \ln(x^2 + y^2).$$

1893. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ si

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

1894. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ si

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}.$$

1895. Calculer $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ si

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1896. Calculer toutes les dérivées partielles du second ordre de la fonction

$$u = xy + yz + zx.$$

1897. Calculer $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ si

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

1898. Calculer $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$ si

$$z = \sin(xy).$$

1899. Calculer $f''_{xx}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yy}(0, 0)$ si

$$f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n.$$

1900. Montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ si

$$z=\arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}.$$

1901. Montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ si

$$z=x^y.$$

1902*. Montrer que pour la fonction

$$f(x, y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

vérifiant la condition supplémentaire $f(0, 0)=0$, on a

$$f''_{xy}(0, 0)=-1, \quad f''_{yx}(0, 0)=1.$$

1903. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si

$$z=f(u, v),$$

où $u=x^2+y^2$, $v=xy$.

1904. Calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si

$$u=f(x, y, z), \text{ où } z=\varphi(x, y).$$

1905. Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si

$$z=f(u, v), \text{ où } u=\varphi(x, y),\ v=\psi(x, y).$$

1906. Montrer que la fonction

$$u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

1907. Montrer que la fonction

$$u=\ln\frac{1}{r},$$

où $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

1908. Montrer que la fonction

$$u(x, t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$$

satisfait à l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. Montrer que la fonction

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

(x_0, y_0, z_0, a sont des constantes) satisfait à l'équation de la transmission de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

1910. Montrer que la fonction

$$u=\varphi(x-at)+\psi(x+at),$$

où φ et ψ sont des fonctions deux fois dérivables, satisfait à l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1911. Montrer que la fonction

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisfait à l'équation

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

1912. Montrer que la fonction

$$u=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisfait à l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1913. Montrer que la fonction $z = f[x + \varphi(x)]$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

1914. Déterminer $u = u(x, y)$ si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

1915. Déterminer la forme de la fonction $u = u(x, y)$ si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1916. Calculer $d^2 z$ si

$$z = e^{xy}.$$

1917. Calculer $d^2 u$ si

$$u = xyz.$$

1918. Calculer $d^2 z$ si

$$z = \varphi(t), \quad \text{où} \quad t = x^2 + y^2.$$

1919. Calculer dz et $d^2 z$ si

$$z = u^v, \text{ où } u = \frac{x}{y}, \ v = xy.$$

1920. Calculer $d^2 z$ si

$$z = f(u, v), \quad \text{où} \quad u = ax, \quad v = by.$$

1921. Calculer $d^2 z$ si

$$z = f(u, v), \quad \text{où} \quad u = xe^y, \quad v = ye^x.$$

1922. Calculer $d^3 z$ si

$$z = e^x \cos y.$$

1923. Après avoir calculé la différentielle du troisième ordre de la fonction

$$z = x \cos y + y \sin x,$$

déterminer toutes les dérivées partielles du 3ème ordre.

1924. Calculer $df(1, 2)$ et $d^2f(1, 2)$ si

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y.$$

1925. Calculer $d^2f(0, 0, 0)$ si

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

§ 8. Intégration des différentielles totales

1°. Condition de différentielle totale. Pour que l'expression $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, où les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont continues dans un domaine simplement connexe D ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, soit, dans le domaine D, la différentielle totale d'une fonction $u(x, y)$, il est nécessaire et suffisant que la condition

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$$

soit satisfaite.

Exemple 1. Se convaincre que l'expression

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy$$

est bien une différentielle totale et déterminer cette fonction.

Solution. Dans le cas donné $P = 2x + y$, $Q = x + 2y$. Donc

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \text{ et, par conséquent,}$$

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

où u est la fonction à déterminer.

Par hypothèse, on a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$ donc,

$$u = \int (2x + y)\,dx = x^2 + xy + \varphi(y).$$

Mais, d'autre part, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + 2y$, d'où

$$\varphi'(y) = 2y, \quad \varphi(y) = y^2 + C \text{ et}$$

$$u = x^2 + xy + y^2 + C.$$

Finalement, on a

$$(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = d(x^2 + xy + y^2 + C).$$

2°. Cas de trois variables. L'expression analogue

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

où $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sont des fonctions des variables x, y et z continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier

ordre, est la différentielle totale d'une fonction $u(x, y, z)$ si et seulement si les conditions

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sont satisfaites.

Exemple 2. Se convaincre que l'expression

$$(3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz$$

est bien une différentielle totale et trouver cette fonction.

Solution. On a ici $P = 3x^2 + 3y - 1$, $Q = z^2 + 3x$, $R = 2yz + 1$. On voit que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

et, par conséquent,

$$(3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz = du =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

où u est la fonction à déterminer.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1,$$

par suite,

$$u = \int (3x^2 + 3y - 1)\,dx = x^3 + 3xy - x + \varphi(y, z).$$

D'autre part,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2 + 3x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1,$$

d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1$. Le problème se ramène à la détermination d'une fonction de deux variables $\varphi(y, z)$ dont les dérivées partielles sont connues et dont la condition de différentielle totale est vérifiée.

Trouvons φ:

$$\varphi(y, z) = \int z^2\,dy = yz^2 + \psi(z)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + \psi'(z) = 2yz + 1,$$
$$\psi'(z) = 1, \quad \psi(z) = z + C,$$

c'est-à-dire $\varphi(y, z) = yz^2 + z + C$. Finalement,

$$u = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C.$$

Après avoir vérifié que les expressions données ci-dessous sont des différentielles totales, déterminer les fonctions.

1926. $y\,dx + x\,dy$.

1927. $(\cos x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - y^2)\,dy$.

1928. $\dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

1929. $\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}\,dx - \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}\,dy$.

1930. $\dfrac{1}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy$.

1931. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$.

1932. Déterminer les constantes a et b de manière que l'expression

$$\frac{(ax^2+2xy+y^2)\,dx - (x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

soit la différentielle totale d'une fonction z et déterminer cette dernière.

Après avoir vérifié que les expressions ci-dessous sont des différentielles totales, déterminer les fonctions.

1933. $(2x + y + z)\,dx + (x + 2y + z)\,dy + (x + y + 2z)\,dz$.

1934. $(3x^2 + 2y^2 + 3z)\,dx + (4xy + 2y - z)\,dy + (3x - y - 2)\,dz$.

1935. $(2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2)\,dx + (x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1)\,dy + (x^2y - 3xy^2 + 3)\,dz$.

1936. $\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}\right)dz$.

1937. $\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1938*. On donne les projections d'une force sur les axes de coordonnées:

$$X = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad Y = \frac{\lambda x}{(x+y)^2},$$

où λ est une constante. Déterminer le coefficient λ de manière que cette force dérive d'un potentiel.

1939. A quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y)$ pour que l'expression

$$f(x, y)(dx + dy)$$

soit une différentielle totale?

1940. Déterminer la fonction u si

$$du = f(x, y)(y\,dx + x\,dy).$$

§ 9. Dérivation des fonctions implicites

1°. Cas d'une variable indépendante. Si l'équation $f(x, y) = 0$, où $f(x, y)$ est une fonction différentiable des variables x et y, définit y comme fonction de x, alors la dérivée de cette fonction donnée sous forme implicite avec la condition $f'_y(x, y) \neq 0$ est donnée par la formule

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \tag{1}$$

Les dérivées d'ordres supérieurs se calculent en dérivant successivement la formule (1).

Exemple 1. Calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ si

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

Solution. Désignons le premier membre de l'équation donnée par $f(x, y)$ et calculons ses dérivées partielles

$$f'_x(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x[(x^2 + y^2)^2 - 1],$$
$$f'_y(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y[(x^2 + y^2)^2 - 1].$$

D'où, en appliquant la formule (1), on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{6x[(x^2 + y^2)^2 - 1]}{6y[(x^2 + y^2)^2 - 1]} = -\frac{x}{y}.$$

Pour calculer la dérivée seconde, dérivons par rapport à x la dérivée première que l'on vient de trouver en tenant compte que y est fonction de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{1 \cdot y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

2°. Cas de plusieurs variables indépendantes. De même, si l'équation $F(x, y, z) = 0$, où $F(x, y, z)$ est une fonction différentiable par rapport aux variables x, y et z, définit z comme fonction des variables indépendantes x et y et si $F'_z(x, y, z) \neq 0$, alors les dérivées partielles de cette fonction donnée sous forme implicite peuvent, en général, être calculées d'après les

formules

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{2}$$

On peut procéder de la manière suivante pour trouver les dérivées de la fonction z: en différentiant l'équation $F(x, y, z) = 0$, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

D'où on peut déterminer dz et, par conséquent, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Exemple 2. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

Solution. 1ère méthode. Désignons par $F(x, y, z)$ le premier membre de l'équation donnée et calculons ses dérivées partielles

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1,$$
$$F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

En appliquant la formule (2), on a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}=-\frac{2x}{6z-y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}.$$

2ème méthode. En différentiant la fonction donnée, on a

$$2x\,dx - 4y\,dy + 6z\,dz - y\,dz - z\,dy + dy = 0.$$

D'où on détermine dz, c'est-à-dire la différentielle totale de la fonction implicite,

$$dz=\frac{2x\,dx+(1-4y-z)\,dy}{y-6z}.$$

En l'identifiant à la formule $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$, on voit que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-6z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-4y-z}{y-6z}.$$

3°. Système de fonctions implicites. Si un système de deux équations

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

définit u et v comme fonctions des variables x et y et si le jacobien

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

alors, les différentielles de ces fonctions (et, par conséquent, leurs dérivées partielles) peuvent être trouvées à partir du système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial v} dv = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Exemple 3. Les équations

$$u + v = x + y, \quad xu + yv = 1$$

définissent u et v comme fonctions de x et y; trouver $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Solution. 1ère méthode. On a, en dérivant les deux équations par rapport à x,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

$$u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}.$$

De même, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

2ème méthode. Par différentiation, on trouve deux équations reliant les différentielles des quatre variables

$$du + dv = dx + dy,$$

$$x\,du + u\,dx + y\,dv + v\,dy = 0.$$

On trouve en résolvant ce système par rapport aux différentielles du et dv

$$du = -\frac{(u+y)\,dx + (v+y)\,dy}{x-y}, \quad dv = \frac{(u+x)\,dx + (v+x)\,dy}{x-y}.$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

4°. Fonctions données sous forme paramétrique. Si la fonction z et les variables x et y sont données par des équations paramétriques

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

et

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

on trouve la différentielle de cette fonction à partir du système d'équations

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases} \tag{4}$$

Connaissant la différentielle $dz = p\,dx + q\,dy$, on trouve les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ et $\frac{dz}{\partial y} = q$.

Exemple 4. La fonction z et les variables x et y sont données par les équations

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3 \ (u \neq v).$$

Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solution. 1ère méthode. On trouve par différentiation trois équations reliant les différentielles des cinq variables

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2u\,du + 2v\,dv, \\ dz = 3u^2 du + 3v^2 dv. \end{cases}$$

Des deux premières équations on détermine du et dv:

$$du = \frac{2v\,dx - dy}{2(v-u)}, \quad dv = \frac{dy - 2u\,dx}{2(v-u)}.$$

Substituons les expressions trouvées de du et dv dans la troisième équation

$$dz = 3u^2 \frac{2v\,dx - dy}{2(v-u)} + 3v^2 \frac{dy - 2u\,dx}{2(v-u)} =$$

$$= \frac{6uv(u-v)\,dx + 3(v^2 - u^2)\,dy}{2(v-u)} = -3uv\,dx + \frac{3}{2}(u+v)\,dy.$$

D'où

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

2ème méthode. On déduit de la troisième des équations données

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3u^2\frac{\partial u}{\partial y}+3v^2\frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{5}$$

Dérivons les deux premières équations d'abord par rapport à x, puis par rapport à y:

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}, & 0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 0=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}, & 1=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

On déduit du premier système

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{v-u},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u-v}.$$

On déduit du second système

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2(u-v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2(v-u)}.$$

On a, en substituant les expressions de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans la formule (5)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{v}{v-u}+3v^2\frac{u}{u-v}=-3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3u^2\frac{1}{2(u-v)}+3v^2\cdot\frac{1}{2(v-u)}=\frac{3}{2}(u+v).$$

1941. Soit y une fonction de x définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Calculer

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\text{ et }\frac{d^3y}{dx^3}.$$

1942. y est la fonction définie par l'équation

$$x^2+y^2+2axy=0\qquad (a>1).$$

Montrer que $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ et expliquer le résultat obtenu.

1943. Calculer $\frac{dy}{dx}$ si $y=1+y^x$.

1944. Calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $y=x+\ln y$.

1945. Calculer $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ et $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$ si

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

En s'aidant des résultats obtenus, représenter approximativement les divers arcs de courbe dont les abscisses appartiennent au voisinage du point d'abscisse $x = 1$.

1946. La fonction y est définie par l'équation

$$\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (a \neq 0).$$

Calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1947. Calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ si

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

1948. La fonction z de deux variables x et y est définie par l'équation

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1949. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1.$$

1950. La fonction z est définie par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0.$$

Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour le système de valeurs $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

1951. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1952. $f(x, y, z) = 0$. Montrer que $\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

1953. $z = \varphi(x, y)$, où y est une fonction de x, définie par l'équation $\psi(x, y) = 0$. Calculer $\frac{dz}{dx}$.

1954. Calculer dz et d^2z, si

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

1955. z est une fonction des variables x et y définie par l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

Calculer dz et d^2z pour les valeurs $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$.

1956. Calculer dz et d^2z, si $\ln z = x + y + z - 1$. Calculer les dérivées premières et secondes de la fonction z.

1957. Soit z une fonction définie par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\,(ax + by + cz),$$

où φ est une fonction différentiable arbitraire et a, b, c sont des constantes. Montrer que

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

1958. Montrer que la fonction z définie par l'équation

$$F\,(x - az,\ y - bz) = 0,$$

où F est une fonction différentiable arbitraire de deux variables, satisfait à l'équation

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

1959. $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right) = 0$. Montrer que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

1960. Montrer que la fonction z définie par l'équation $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

1961. Les fonctions y et z de la variable indépendante x sont définies par le système d'équations $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, pour $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

1962. Les fonctions y et z de la variable indépendante x sont définies par le système d'équations

$$xyz = a, \quad x + y + z = b.$$

Calculer

$$dy,\ dz,\ d^2y,\ d^2z.$$

1963. Les fonctions u et v des variables indépendantes x et y sont données implicitement par le système d'équations

$$u = x + y, \quad uv = y.$$

Calculer

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ pour $x = 0$, $y = 1$.

1964. Les fonctions u et v des variables indépendantes x et y sont définies implicitement par le système d'équations

$$u + v = x, \quad u - yv = 0.$$

Calculer

$$du, \ dv, \ d^2u, \ d^2v.$$

1965. Les fonctions u et v des variables x et y sont définies implicitement par le système d'équations

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Calculer $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

1966. a) Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = cv$.

b) Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

c) Calculer dz, si $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $z = uv$.

1967. $z = F(r, \varphi)$ où r et φ sont des fonctions des variables x et y définies par le système d'équations

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1968. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en considérant z comme fonction de x et y, si

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \psi.$$

§ 10. Changement des variables

Lors des changements des variables on a besoin d'exprimer à l'aide des règles de dérivation des fonctions composées les dérivées qui participent dans les expressions différentielles par d'autres dérivées.

1°. Changement de variables dans les expressions qui contiennent des dérivées ordinaires.

Exemple 1. Transformer l'équation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0$$

en posant $x = \frac{1}{t}$.

Solution. Exprimons les dérivées de y par rapport à x par les dérivées de y par rapport à t. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2 \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\left(2t \frac{dy}{dt} + t^2 \frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2) =$$

$$= 2t^3 \frac{dy}{dt} + t^4 \frac{d^2y}{dt^2}.$$

En substituant les expressions trouvées des dérivées dans l'équation donnée et en remplaçant x par $\frac{1}{t}$, on a

$$\frac{1}{t^2} \cdot t^3 \left(2\frac{dy}{dt} + t \frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{t}\left(-t^2 \frac{dy}{dt}\right) + a^2t^2y = 0$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

Exemple 2. Transformer l'équation

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

où y sera la variable et x sa fonction.

Solution. Exprimons les dérivées de y par rapport à x par les dérivées de x par rapport à y.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Substituant ces expressions des dérivées dans l'équation donnée, on a

$$x\left[-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right]+\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}-\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=0,$$

ou, finalement,

$$x\frac{d^2x}{dy^2}-1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0.$$

Exemple 3. Transformer l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

en passant aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Solution. En considérant r comme fonction de φ, la formule (1) donne:

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\, dr+r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr-r\sin\varphi\, d\varphi}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}.$$

En substituant dans l'équation donnée les expressions de x, y et $\frac{dy}{dx}$, on a:

$$\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi}{r\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

ou, après simplifications,

$$\frac{dr}{d\varphi}=r.$$

2°. Changement de variables dans les expressions contenant des dérivées partielles.

Exemple 4. Transformer l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \qquad (a \neq 0)$$

en passant aux nouvelles variables indépendantes α et β, où $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$.

Solution. Exprimons les dérivées partielles de la fonction u par rapport à x et t par les dérivées partielles de u par rapport à α et β.

En appliquant les formules de dérivation des fonctions composée

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a)+\frac{\partial u}{\partial \beta}a=a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Dérivons une seconde fois, en appliquant les mêmes formules :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}=$$

$$=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right)(-a)+a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right)a=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right)\cdot 1+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)\cdot 1=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

En les substituant dans l'équation donnée, on a

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}=0.$$

Exemple 5. Transformer l'équation $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, en prenant pour nouvelles variables indépendantes $u=x$, $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ et pour une nouvelle fonction $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

Solution. Exprimons les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial u}$ et $\frac{\partial w}{\partial v}$. Pour cela, dérivons

les relations données entre les anciennes et les nouvelles variables

$$du = dx, \quad dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}, \quad dw = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$

D'autre part,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

Donc,

$$\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial u} dx + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2} \right) = \frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{z^2}.$$

D'où

$$dz = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dx + \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} dy$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right)$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

En substituant ces expressions dans l'équation donnée, on a

$$x^2 z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + z^2 \frac{\partial w}{\partial v} = z^2$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

1969. Transformer l'équation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

en posant $x = e^t$.

1970. Transformer l'équation

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0,$$

en posant $x = \cos t$.

1971. Transformer les équations suivantes en prenant y comme variable :

a) $\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$

b) $\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$

1972. La tangente de l'angle μ formé par la tangente MT et le rayon vecteur OM au point de tangence (fig. 69) s'exprime de la manière suivante:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{y'-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}y'}.$$

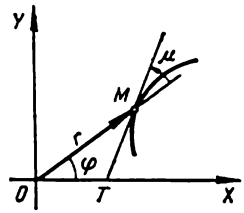


Fig. 69

Transformer cette expression en passant aux coordonnées polaires $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1973. La courbure d'une courbe est donnée par la formule

$$K=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}.$$

Exprimer cette formule à l'aide des coordonnées polaires $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1974. Transformer à l'aide des nouvelles variables indépendantes u et v l'équation

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

si $u=x$, $v=x^2+y^2$.

1975. Transformer à l'aide des variables indépendantes u et v l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0,$$

si $u=x$, $v=\frac{y}{x}$.

1976. Transformer l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

en passant aux coordonnées polaires

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

1977. Transformer l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en posant $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$.

1978. Transformer l'équation

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) z$$

en introduisant les nouvelles variables indépendantes

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

et la nouvelle fonction $w = \ln z - (x + y)$.

1979. Transformer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en prenant pour nouvelles variables indépendantes $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ et pour nouvelle fonction $w = \frac{z}{x}$.

1980. Transformer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

en posant $u = x + y$ et $v = x - y$, $w = xy - z$, où $w = w(u, v)$.

§ 11. Plan tangent et normale à une surface

1°. Equations du plan tangent et de la normale dans le cas où la surface est donnée par une équation explicite. Le *plan tangent* à la surface au point M (point de tangence) est le plan qui contient toutes les tangentes en ce point aux différentes courbes tracées sur la surface et passant par ce point.

La *normale* à la surface est la perpendiculaire au plan tangent au point de tangence.

Si l'équation de la surface dans un système de coordonnées rectangulaires est donnée sous forme explicite $z = f(x, y)$, où $f(x, y)$ est une fonction différentiable, alors l'équation du plan tangent au point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface est

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0). \qquad (1)$$

Ici $z_0 = f(x_0, y_0)$ et X, Y, Z sont les coordonnées courantes d'un point du plan tangent.

L'équation de la normale est

$$\frac{X-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z-z_0}{-1} \tag{2}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes d'un point de la normale.

Exemple 1. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ au point $M(2, -1, 1)$.

Solution. Calculons les dérivées partielles de la fonction donnée et leurs valeurs au point M.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

D'où, d'après les formules (1) et (2), on a $z - 1 = 2(x-2) + 2(y+1)$, où $2x + 2y - z - 1 = 0$ est l'équation du plan tangent et $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ celle de la normale.

2°. Equations du plan tangent et de la normale dans le cas où la surface est donnée par une équation implicite. Dans le cas où l'équation de la surface est donnée par une équation implicite

$$F(x, y, z) = 0$$

et $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, les équations du plan tangent et de la normale sont respectivement

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot(Z - z_0) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{4}$$

Exemple 2. Former les équations du plan tangent et de la normale à la surface $3xyz - z^3 = a^3$ au point $x = 0$, $y = a$.

Solution. On trouve la cote du point de tangence en substituant $x = 0$, $y = a$ dans l'équation de la surface: $-z^3 = a^3$, d'où $z = -a$. Ainsi, le point de tangence est $M(0, a, -a)$.

En désignant par $F(x, y, z)$ le premier membre de l'équation, on trouve pour les dérivées partielles et leurs valeurs au point M

$$F'_x = 3yz, \qquad (F'_x)_M = -3a^2,$$

$$F'_y = 3xz, \qquad (F'_y)_M = 0,$$

$$F'_z = 3xy - 3z^2, \qquad (F'_z)_M = -3a^2.$$

En appliquant les formules (3) et (4), on a

$$-3a^2(x - 0) + 0(y - a) - 3a^2(z + a) = 0$$

ou $x + z + a = 0$, qui est l'équation du plan tangent,

$$\frac{x-0}{-3a^2} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{-3a^2}$$

ou $\frac{x}{1} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{1}$ est celle de la normale.

1981. Former les équations du plan tangent et de la normale aux surfaces suivantes et aux points indiqués:

a) au paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$ au point $(1, -2, 5)$;

b) au cône $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ au point $(4, 3, 4)$;

c) à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ au point $(R \cos \alpha, R \sin \alpha, R)$.

1982. En quel point de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la normale forme des angles égaux avec les axes de coordonnées?

1983. Par le point M (3, 4, 12) de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ on mène des plans perpendiculaires aux axes OX et OY. Former l'équation du plan passant par les tangentes aux sections obtenues au point commun M.

1984. Montrer que l'équation du plan tangent à une surface du second degré à centre

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k$$

en un de ses points M (x_0, y_0, z_0) est de la forme

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = k.$$

1985. Mener les plans tangents parallèles au plan $x + 4y + 6z = 0$ à la surface $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$.

1986. Mener un plan tangent à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ coupant les axes de coordonnées suivant des segments égaux.

1987. Trouver sur la surface $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ les points en lesquels les plans tangents sont parallèles aux plans de coordonnées.

1988. Montrer que les plans tangents à la surface $xyz = m^3$ forment avec les plans de coordonnées un tétraèdre de volume constant.

1989. Montrer que les plans tangents à la surface $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ découpent sur les axes de coordonnées des segments dont la somme est constante.

1990. Montrer que le cône $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ et la sphère

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$$

sont tangents aux points $(0, \pm b, c)$.

1991. On appelle *angle de deux surfaces* l'angle formé par les plans tangents menés au point d'intersection de ces surfaces.

Sous quel angle le cylindre $x^2+y^2=R^2$ et la sphère $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ se coupent au point $M\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$?

1992. Des surfaces sont dites *orthogonales* si elles se coupent sous un angle droit en chaque point de leur courbe d'intersection.

Montrer que les surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (sphère), $y = x \operatorname{tg} \varphi$ (plan) et $z^2 = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \psi$ (cône), où r, φ, ψ sont les coordonnées sphériques, sont réciproquement orthogonales.

1993. Montrer que tous les plans tangents à la surface conique $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$, où $x_0 \neq 0$, passent par l'origine des coordonnées.

1994*. Déterminer les projections de l'ellipsoïde

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$$

sur les plans de coordonnées.

1995. Montrer que la normale en un point quelconque de la surface de révolution $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ $(f' \neq 0)$ coupe l'axe de rotation.

§ 12. Formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables

Soit $f(x, y)$ une fonction qui possède au voisinage du point (a, b) des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $(n+1)$ inclus. Dans ces conditions, dans le voisinage considéré, on a la *formule de Taylor*:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}[f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) +$$
$$+ f''_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} +\right.$$
$$\left. + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b) + R_n(x, y), \qquad (1)$$

où

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} \times$$
$$\times f[a + \theta(x-a),\ b + \theta(y-b)] \qquad (0 < \theta < 1).$$

Avec d'autres notations:

$$f(x+h,\ y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x, y) + 2hkf''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x + \theta h;\ \ y + \theta k), \qquad (2)$$

ou

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!}df(x, y) + \frac{1}{2!}d^2 f(x, y) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x + \theta h;\ \ y + \theta k). \qquad (3)$$

Le cas particulier de la formule (1) pour $a = b = 0$ s'appelle *formule de Maclaurin*.

Des formules analogues sont vraies pour les fonctions à trois variables et plus.

E x e m p l e. Trouver l'accroissement de la fonction $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ lorsqu'on passe des valeurs $x = 1$, $y = 2$ aux valeurs $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$.

S o l u t i o n. L'accroissement cherché peut être déterminé en appliquant la formule (2). Pour cela, calculons préalablement les dérivées partielles successives et leurs valeurs au point donné (1, 2):

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y, \qquad f'_x(1;\ 2) = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9,$$
$$f'_y(x, y) = -6y^2 + 3x, \quad f'_y(1;\ 2) = -6\cdot 4 + 3\cdot 1 - 21,$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \qquad f''_{xx}(1; 2) = 6 \cdot 1 = 6,$$
$$f''_{xy}(x, y) = 3, \qquad f''_{xy}(1; 2) = 3,$$
$$f''_{yy}(x, y) = -12y, \qquad f''_{yy}(1; 2) = -12 \cdot 2 = -24,$$
$$f'''_{xxx}(x, y) = 6, \qquad f'''_{xxx}(1; 2) = 6,$$
$$f'''_{xxy}(x, y) = 0, \qquad f'''_{xxy}(1; 2) = 0,$$
$$f'''_{xyy}(x, y) = 0, \qquad f'''_{xyy}(1; 2) = 0,$$
$$f'''_{yyy}(x, y) = -12, \qquad f'''_{yyy}(1; 2) = -12.$$

Toutes les autres dérivées sont identiquement nulles. En substituant dans la formule (2) les résultats trouvés, on a:

$$\Delta f(x, y) = f(1+h, 2+k) - f(1, 2) =$$
$$= \frac{1}{1!}[h \cdot 9 + k(-21)] + \frac{1}{2!}[h^2 \cdot 6 + 2hk \cdot 3 + k^2(-24)] +$$
$$+ \frac{1}{3!}[h^3 \cdot 6 + 3h^2k \cdot 0 + 3hk^2 \cdot 0 + k^3(-12)] =$$
$$= 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3.$$

1996. Développer $f(x + h, y + k)$, suivant les puissances entières positives de h et k, si

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

1997. Développer la fonction $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ suivant la formule de Taylor au voisinage du point $(-2; 1)$.

1998. Déterminer l'accroissement de la fonction $f(x, y) = x^2y$ lorsqu'on passe des valeurs $x = 1$, $y = 1$ aux valeurs

$$x_1 = 1 + h, \quad y_1 = 1 + k.$$

1999. Développer la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ à l'aide de la formule de Taylor au voisinage du point $(1; 1; 1)$.

2000. Développer $f(x + h, y + k, z + l)$ suivant les puissances entières positives de h, k, et l, si

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

2001. Développer la fonction

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

jusqu'aux termes du 3ème ordre inclus à l'aide de la formule de Maclaurin.

2002. Développer la fonction

$$f(x, y) = \cos x \cos y$$

jusqu'aux termes du 4ème ordre inclus à l'aide de la formule de Maclaurin.

2003. Développer la fonction

$$f(x, y) = y^x$$

jusqu'aux termes du second ordre inclus au voisinage du point (1, 1) à l'aide de la formule de Taylor.

2004. Développer la fonction

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

jusqu'aux termes du 3ème ordre inclus au voisinage du point (1, —1) à l'aide de la formule de Taylor.

2005. Etablir les formules approchées aux termes du troisième ordre près par rapport aux grandeurs α et β pour les expressions:

a) $\operatorname{arctg} \frac{1+\alpha}{1-\beta}$; b) $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}$,

si $|\alpha|$ et $|\beta|$ sont petits par rapport à 1.

2006*. A l'aide du développement de Taylor jusqu'aux termes du second ordre, calculer approximativement les expressions

a) $\sqrt{1{,}03}$; $\sqrt[3]{0{,}98}$; b) $(0{,}95)^{2{,}01}$.

2007. z est la fonction implicite de x et y définie par l'équation $z^3 - 2xz + y = 0$ qui prend la valeur $z = 1$ pour $x = 1$ et $y = 1$. Donner plusieurs termes du développement de la fonction z suivant les puissances croissantes de $x - 1$ et $y - 1$.

§ 13. Extrémums des fonctions de plusieurs variables

1°. Définition de l'extrémum d'une fonction. On dit que la fonction $f(x, y)$ a un *maximum* (resp. *minimum*) $f(a, b)$ au point $P(a, b)$, si pour tous les points $P'(x, y)$ différents de P d'un voisinage suffisamment petit du point P l'inégalité $f(a, b) > f(x, y)$ (resp. $f(a, b) < f(x, y)$) est satisfaite. Les maximums et les minimums d'une fonction sont appelés ses *extrémums*. On définit d'une manière analogue les extrémums d'une fonction de trois variables et plus.

2°. Conditions nécessaires d'extrémums. Les points en lesquels une fonction différentiable $f(x, y)$ peut avoir un extrémum (appelés encore *points stationnaires*) sont déterminés en résolvant le système d'équations

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0 \tag{1}$$

(*conditions nécessaires* d'extrémum). Le système (1) est équivalent à une équation, à savoir $df(x, y) = 0$. Dans le cas général, en un point d'extrémum $P(a, b)$ de la fonction $f(x, y)$, soit que $df(a, b) = 0$, soit encore que $df(a, b)$ n'existe pas.

3°. Conditions suffisantes d'extrémums. Soit $P(a, b)$ un point stationnaire de la fonction $f(x, y)$, c'est-à-dire un point tel que $df(a, b) = 0$. Alors: a) si $d^2f(a, b) < 0$ pour $dx^2 + dy^2 > 0$, $f(a, b)$ est un *maximum* de la fonction $f(x, y)$; b) si $d^2f(a, b) > 0$ pour $dx^2 + dy^2 > 0$, $f(a, b)$ est un *minimum* de la fonction $f(x, y)$; c) si $d^2f(a, b)$ change de signe, $f(a, b)$ n'est pas un extrémum de la fonction $f(x, y)$.

Les conditions énoncées sont équivalentes aux suivantes: soit $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ et $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$, $C = f''_{yy}(a, b)$. Formons le *discriminant*

$$\Delta = AC - B^2.$$

Alors: 1) si $\Delta > 0$, la fonction possède un extrémum au point $P(a, b)$, à savoir un maximum si $A < 0$ (ou $C < 0$), un minimum si $A > 0$ (ou $C > 0$); 2) si $\Delta < 0$, il n'y a pas d'extrémum au point $P(a, b)$; 3) si $\Delta = 0$, on ne peut rien dire en ce qui concerne l'existence d'un extrémum de la fonction au point $P(a, b)$ (ce cas nécessite une étude plus approfondie).

4°. Cas d'une fonction de plusieurs variables. Pour une fonction de trois variables et plus, les conditions nécessaires d'existence d'un extrémum sont analogues aux conditions (1) et les conditions suffisantes sont analogues aux conditions a), b), c) de 3°.

Exemple 1. Etudier les extrémums de la fonction

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Solution. Calculons les dérivées partielles et formons le système d'équations (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

ou

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve quatre points stationnaires:

$$P_1(1, 2); \quad P_2(2, 1); \quad P_3(-1, -2); \quad P_4(-2, -1).$$

Calculons les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

et formons le discriminant $\Delta = AC - B^2$ pour chaque point stationnaire.

1) Pour le point P_1: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$; $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)_{P_1} = 12$; $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$; $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. Ainsi, au point P_1 il n'y a pas d'extrémum.

2) Pour le point P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$, $\Delta = 144 - 36 > 0$, $A > 0$. Au point P_2, la fonction a un minimum. Ce minimum est égal à la valeur de la fonction pour $x = 2$, $y = 1$.

$$z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28.$$

3) Pour le point P_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$, $\Delta = 36 - 144 < 0$. Il n'y a pas d'extrémum.

4) Pour le point P_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$, $\Delta = 144 - 36 > 0$, $A < 0$. Au point P_4 la fonction a un maximum égal à $z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

5°. Extrémum lié. Dans le cas le plus simple, l'*extrémum lié* d'une fonction $f(x, y)$ est, par définition, le maximum ou le minimum de cette fonction atteint sous la condition que les variables sont liées par l'équation $\varphi(x, y) = 0$ (*équation de liaison*). Pour déterminer l'extrémum lié d'une fonction $f(x, y)$ en présence de la relation $\varphi(x, y) = 0$, on forme l'équation auxiliaire dite *équation de Lagrange*

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

où λ est un facteur constant indéterminé, puis on cherche l'extrémum ordinaire de cette fonction. Les conditions nécessaires d'extrémum donnent le système des trois équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

à trois inconnues x, y, λ, d'où on peut, en général, déterminer ces inconnues.

En ce qui concerne l'existence et le caractère de l'extrémum lié, ce problème se résout en étudiant le signe de la différentielle seconde de la fonction de Lagrange

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

pour le système de valeurs x, y, λ obtenu de (2) et avec la condition que dx et dy soient liées entre elles par l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \qquad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Précisément, la fonction $f(x, y)$ a un maximum lié si $d^2F < 0$ et un minimum lié si $d^2F > 0$. En particulier, si le discriminant Δ pour

la fonction $F(x, y)$ au point stationnaire est positif, on a alors en ce point un maximum lié pour la fonction $f(x, y)$ si $A < 0$ (ou $C < 0$) et un minimum lié si $A > 0$ (ou $C > 0$).

De manière analogue, on trouve l'extrémum lié d'une fonction de trois variables et plus en présence d'une ou plusieurs équations de liaison (dont le nombre doit cependant être inférieur au nombre de variables). Dans ce cas, on doit introduire dans la fonction de Lagrange autant de facteurs indéterminés qu'il y a d'équations de liaison.

Exemple 2. Déterminer l'extrémum de la fonction

$$z = 6 - 4x - 3y$$

avec la condition que les variables x et y satisfont à l'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Solution. Ce problème se ramène à un problème géométrique qui consiste à déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la cote z du plan $z = 6 - 4x - 3y$ pour les points d'intersection de ce plan avec le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Formons l'équation de Lagrange

$$F(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda (x^2 + y^2 - 1).$$

On a $\frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$. Les conditions nécessaires nous donnent le système d'équations

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

en le résolvant on trouve

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5},$$

et

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Puisque

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

on a

$$d^2F = 2\lambda (dx^2 + dy^2).$$

Si $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$ et $y = \frac{3}{5}$, on a $d^2F > 0$, et, par conséquent, en ce point la fonction a un minimum lié. Si $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$ et $y = -\frac{3}{5}$, on a $d^2F < 0$ et, par conséquent, en ce point la fonction a un maximum lié.

Ainsi,

$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$$

6°. Plus petite et plus grande valeur d'une fonction. Une fonction différentiable dans un domaine fermé borné atteint sa plus petite (resp. plus grande) valeur soit en un point stationnaire, soit en un point de la frontière du domaine.

Exemple 3. Déterminer la plus grande et la plus petite valeurs de la fonction

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

dans le domaine

$$x \leqslant 0, \quad y \leqslant 0, \quad x + y \geqslant -3.$$

Solution. Le domaine indiqué est le triangle (fig. 70).

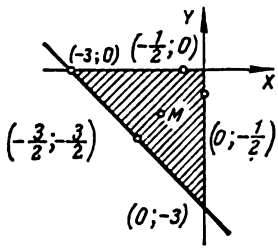


Fig. 70

1) Trouvons les points stationnaires:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x - y + 1 = 0, \\ z'_y \equiv 2y - x + 1 = 0; \end{cases}$$

d'où $x = -1$, $y = -1$; on trouve le point $M(-1, -1)$.

Au point M, la valeur de la fonction est $z_M = -1$. L'étude de l'extrémum n'est pas obligatoire.

2) Etudions la fonction sur la frontière du domaine.

Pour $x = 0$, on a $z = y^2 + y$ et le problème se ramène à la détermination de la plus grande et de la plus petite valeur de cette fonction d'une variable sur le segment $-3 \leqslant y \leqslant 0$. En faisant l'étude, on trouve que $(z_{p.g.v})_{x=0} = 6$ au point $(0, -3)$; $(z_{p.p.v})_{x=0} = -\frac{1}{4}$ au point $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

On a pour $y = 0$, $z = x^2 + x$. De même, on trouve que $(z_{p.g.v})_{y=0} = 6$ au point $(-3, 0)$; $(z_{p.p.v})_{y=0} = -\frac{1}{4}$ au point $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Pour $x + y = -3$ ou $y = -3 - x$ on a $z = 3x^2 + 9x + 6$. De la même manière que précédemment, on trouve que $(z_{p.p.v})_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$ au point $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $(z_{p.g.v})_{x+y=-3} = 6$ M coïncide avec $(z_{p.g.v})_{x=0}$ et $(z_{p.g.v})_{y=0}$. On aurait pu étudier l'extrémum lié de la fonction sur la droite $x + y = -3$ sans la ramener à une fonction d'une variable.

3) En comparant toutes les valeurs obtenues de z, on en déduit que $z_{p.g.v} = 6$ aux points $(0, -3)$ et $(-3, 0)$, $z_{p.p.v} = -1$ au point stationnaire M.

Etudier le maximum et le minimum des fonctions de deux variables suivantes:

2008. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

2009. $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

2010. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2011. $z = x^3y^2(6 - x - y)\ (x > 0,\ y > 0)$.

2012. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

2013. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

2014. $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

2015. $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

2016. $z = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

Déterminer les extrémums des fonctions de trois variables:

2017. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

2018. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Déterminer les extrémums des fonctions données sous forme implicite:

2019*. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

2020. $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$.

Définir les extrémums liés des fonctions:

2021. $z = xy$ pour $x + y = 1$.

2022. $z = x + 2y$ pour $x^2 + y^2 = 5$.

2023. $z = x^2 + y^2$ pour $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

2024. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ pour $y - x = \frac{\pi}{4}$.

2025. $u = x - 2y + 2z$ pour $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2026. $u = x^2 + y^2 + z^2$ pour $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ (a > b > c > 0)$.

2027. $u = xy^2z^3$ pour $x + y + z = 12$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

2028. $u = xyz$ avec les conditions $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

2029. Démontrer l'inégalité

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Indication. Chercher le maximum de la fonction $u = xyz$ avec la condition $x + y + z = S$.

2030. Déterminer la plus grande valeur de la fonction $z = 1 + x + 2y$ dans les domaines: a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$; b) $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x - y \leqslant 1$.

2031. Déterminer les plus grandes et les plus petites valeurs des fonctions a) $z = x^2y$ et b) $z = x^2 - y^2$ dans le domaine $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2032. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $z = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$ dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2033. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la fonction $z = x^3 + y^3 - 3xy$ dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

§ 14. Problèmes sur la détermination des plus petites et plus grandes valeurs des fonctions

Exemple 1. On demande de décomposer le nombre positif a en trois nombres de manière que leurs produits soient maximums.

Solution. Désignons par x, y, $a - x - y$ les trois nombres à déterminer. Cherchons le maximum de la fonction $f(x, y) = xy(a - x - y)$.

D'après la nature même du problème, on considère la fonction $f(x, y)$ à l'intérieur du triangle fermé $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant a$ (fig. 71).

En résolvant le système

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = y(a - 2x - y) = 0, \\ f'_y(x, y) = x(a - x - 2y) = 0, \end{cases}$$

on trouve à l'intérieur du triangle un point stationnaire unique $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

Pour ce point, vérifions si les conditions suffisantes sont satisfaites. On a

$$f''_{xx}(x, y) = -2y, \quad f''_{y}(x, y) = a - 2x - 2y, \quad f''_{yy}(x, y) = -2x.$$

Par conséquent, $A = f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a$,

$$B = f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{3}a,$$

$$C = f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a$$

et

$$\Delta = AC - B^2 > 0, \quad A < 0.$$

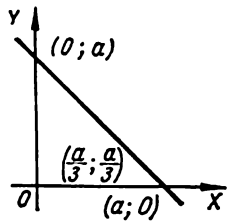


Fig. 71

Ainsi, au point $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ la fonction atteint son maximum. Puisque sur les côtés du triangle $f(x, y) = 0$, ce maximum est donc la plus grande valeur, c'est-à-dire le produit est maximum si $x = y = a - x - y = \frac{a}{3}$; la valeur de ce maximum est $\frac{a^3}{27}$.

Remarque. On aurait pu résoudre ce problème par la méthode des extrémums liés en cherchant le maximum de la fonction $u = xyz$ avec la condition $x + y + z = a$.

2034. Déterminer parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume donné V celui dont la surface totale est minimum.

2035. Déterminer les dimensions d'une baignoire rectangulaire ouverte de capacité V donnée pour que sa surface soit minimum.

2036. Déterminer parmi tous les triangles de périmètre $2p$ donné celui dont la surface est maximum.

2037. Déterminer un parallélépipède rectangle de surface S donnée de volume maximum.

2038. Mettre le nombre positif a sous la forme d'un produit de quatre nombres positifs de manière que leur somme soit minimum.

2039. Trouver un point $M(x, y)$ sur le plan XOY de manière que la somme des carrés des distances aux trois droites $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ soit minimum.

2040. Déterminer un triangle de périmètre donné $2p$ de manière qu'en le faisant tourner autour de l'un de ses côtés il engendre un corps de volume maximum.

2041. On donne dans le plan trois points matériels $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ de masses m_1, m_2, m_3. Déterminer la position du point $P(x, y)$ de manière que le moment quadratique (moment d'inertie) du système de points donné par rapport au point P (c'est-à-dire la somme $m_1P_1P^2 + m_2P_2P^2 + m_3P_3P^2$) soit minimum.

2042. Faire passer par le point $M(a, b, c)$ un plan de manière qu'il forme avec les plans de coordonnées un tétraèdre de volume minimum.

2043. Inscrire un parallélépipède rectangle de volume maximum dans un ellipsoïde.

2044. Déterminer les dimensions extérieures d'une caisse ouverte, dont l'épaisseur des parois δ et la capacité (intérieure) V sont données, de manière que la dépense de matériel utilisé pour faire cette caisse soit minimum.

2045. Déterminer un point de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en lequel la tangente forme avec les axes de coordonnées un triangle de superficie minimum.

2046*. Déterminer les axes de l'ellipse

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

2047. Inscrire dans une boule un cylindre de surface totale maximum.

2048. Les lits de deux cours d'eau (entre les limites d'un certain domaine) sont approximativement représentés par la parabole $y = x^2$ et la droite $x - y - 2 = 0$. On demande de réunir les deux cours d'eau par un canal rectiligne de manière que sa longueur soit minimum. Par quels points on devra le faire passer?

2049. Déterminer la plus courte distance du point $M(1, 2, 3)$ à la droite

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}.$$

2050*. Les points A et B se trouvent dans des milieux optiques différents séparés l'un de l'autre par une droite (fig. 72). Soient v_1 et v_2 les vitesses de propagation respectives de la lumière dans le premier milieu et le second.

On demande de déterminer à l'aide du « principe de Fermat », d'après lequel le rayon lumineux se propage suivant la ligne brisée AMB qui exige le minimum de temps, la loi de réfraction des rayons lumineux.

2051. Déterminer à l'aide du « principe de Fermat » la loi de réflexion sur un plan d'un rayon lumineux se propageant dans un milieu homogène (fig. 73).

2052*. Lorsqu'un courant électrique I se propage dans un circuit électrique de résistance R, la quantité de chaleur

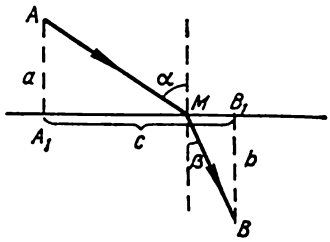


Fig. 72

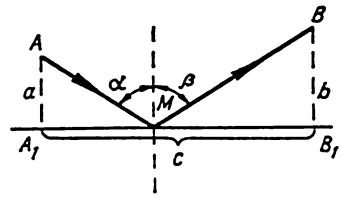


Fig. 73

dégagée pendant l'unité de temps est proportionnelle à I^2R. Décomposer le courant I en courants I_1, I_2, I_3 à l'aide de trois conducteurs de résistance R_1, R_2, R_3 de manière que la chaleur dégagée soit minimum?

§ 15. Points singuliers des courbes planes

1°. Définition du point singulier. Le point $M(x_0, y_0)$ d'une courbe plane $f(x, y) = 0$ est appelé *point singulier* si ses coordonnées vérifient simultanément les trois équations

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

2°. Principaux types de points singuliers. Supposons qu'en un point singulier $M(x_0, y_0)$ les dérivées secondes

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),$$
$$B = f''_{xy}(x_0, y_0),$$
$$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

ne sont pas toutes nulles et

$$\Delta = AC - B^2,$$

alors,
a) si $\Delta > 0$, M est un *point isolé* (fig. 74);
b) si $\Delta < 0$, M est un *nœud* (*point double*) (fig. 75);
c) si $\Delta = 0$, alors M est soit un *point de rebroussement* de 1re espèce (fig. 76) ou de seconde espèce (fig. 77), soit un *point isolé* ou un *point d'osculation* (fig. 78).

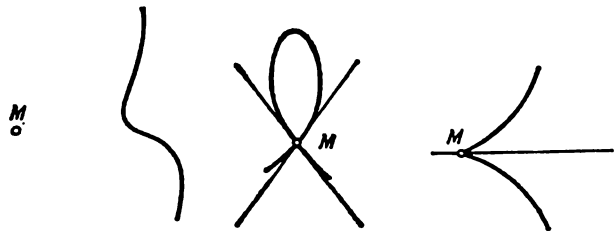


Fig. 74 *Fig. 75* *Fig. 76*

Pour résoudre les problèmes de cette section, on demande de construire les courbes.

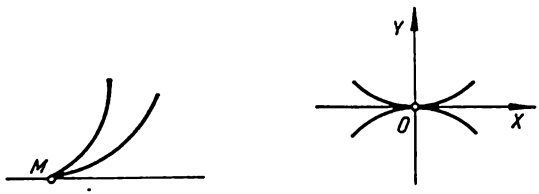


Fig. 77 *Fig. 78*

Exemple 1. Monterer que la courbe $y^2 = ax^2 + x^3$ a un nœud si $a > 0$; un point isolé si $a < 0$; un point de rebroussement de première espèce si $a = 0$.

Solution. Ici $f(x, y) \equiv ax^2 + x^3 - y^2$. Calculons les dérivées partielles et égalons-les à 0

$$f'_x(x, y) = 2ax + 3x^2 = 0,$$
$$f'_y(x, y) = -2y = 0.$$

Ce système a deux solutions: $O(0, 0)$ et $N\left(-\frac{3}{2}a, 0\right)$, mais les coordonnées du point N ne vérifient pas l'équation de la courbe donnée. Ainsi, il n'y a qu'un point singulier $O(0, 0)$.

Calculons les dérivées secondes et leurs valeurs au point O:

$$f''_{xx}(x, y) = 2a + 6x, \quad A = 2a,$$
$$f''_{xy}(x, y) = 0, \quad B = 0,$$
$$f''_{yy}(x, y) = -2, \quad C = -2,$$
$$\Delta = AC - B^2 = -4a.$$

Par conséquent,

si $a > 0$, $\Delta < 0$ et le point O est un nœud (fig. 79);
si $a < 0$, $\Delta > 0$ et le point O et un point isolé (fig. 80);
si $a = 0$, $\Delta = 0$. Dans ce cas, l'équation de la courbe est $y^2 = x^3$

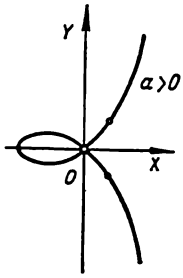


Fig. 79

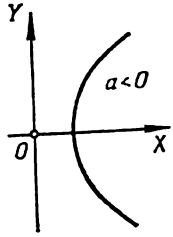


Fig. 80

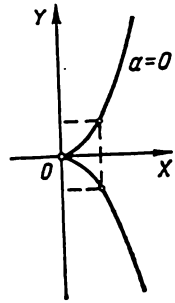


Fig. 81

ou $y = \pm\sqrt{x^3}$; y existe seulement pour $x \geqslant 0$; la courbe est symétrique par rapport à l'axe OX qui est une tangente. Par conséquent, le point M est un point de rebroussement de première espèce (fig. 81).

Déterminer la nature des points singuliers des courbes:

2053. $y^2 = -x^2 + x^4$.

2054. $(y - x^2)^2 = x^5$.

2055. $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$.

2056. $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

2057. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*folium de Descartes*).

2058. $y^2(a - x) = x^3$ (*cissoïde*).

2059. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (*lemniscate*).

2060. $(a + x)y^2 = (a - x)x^2$ (*strophoïde*).

2061. $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$ $(a > 0,\ b > 0)$ (*conchoïde*).

Considérer les trois cas

$$1)\ a > b;\quad 2)\ a = b;\quad 3)\ a < b.$$

2062. Etudier la variation de la nature du point singulier de la courbe $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ en fonction des valeurs de a, b, c ($a \leqslant b \leqslant c$ sont réels).

§ 16. Enveloppes

1°. Définition de l'enveloppe. On appelle *enveloppe d'une famille de courbes planes* la courbe (ou l'ensemble de courbes) qui est tangente à chacune des courbes de la famille donnée; en outre, en chacun de ses points l'enveloppe est tangente à une courbe de la famille.

2°. Equation de l'enveloppe. Si une famille de courbes dépendant d'un paramètre variable α

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

a une enveloppe, alors les équations paramétriques de cette dernière se déterminent à l'aide du système d'équations

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

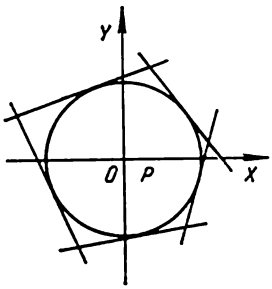


Fig. 82

En éliminant dans le système (1) le paramètre α, on en déduit une équation de la forme

$$D(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Il faut remarquer que la courbe (2) obtenue formellement (que l'on appelle *courbe discriminante*) peut contenir le lieu géométrique des points singuliers de la famille considérée qui est étranger à l'enveloppe de cette famille, si cette enveloppe existe.

On recommande de faire un dessin lors de la résolution des problèmes de ce paragraphe.

Exemple. Trouver l'enveloppe de la famille de droites

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (p = \text{const}, \quad p > 0).$$

Solution. La famille de droites considérées dépend du paramètre α. Formons le système d'équations (1)

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système par rapport à x et y, on en déduit les équations paramétriques de l'enveloppe

$$x = p \cos \alpha, \quad y = p \sin \alpha.$$

En élevant au carré ces deux équations puis en les ajoutant, on élimine le paramètre α:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Ainsi, l'enveloppe de la famille de droites considérées, est une circonférence de rayon p et de centre à l'origine des coordonnées. La famille de droites donnée est la famille des tangentes à cette circonférence (fig. 82).

2063. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles

$$(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}.$$

2064. Trouver l'enveloppe de la famille de droites

$$y=kx+\frac{p}{2k}$$

(k est le paramètre variable).

2065. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles de rayon R et dont les centres se trouvent sur l'axe OX.

2066. Trouver une courbe qui enveloppe un segment de longueur l quand ses extrémités glissent sur les axes de coordonnées.

2067. Trouver l'enveloppe d'une famille de droites formant avec les axes de coordonnées un triangle d'aire constante S.

2068. Trouver l'enveloppe des ellipses d'aire constante dont les axes de symétrie coïncident.

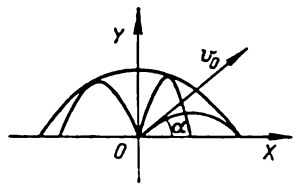


Fig. 83

2069. Etudier « les courbes discriminantes » des familles de courbes suivantes (C est le paramètre variable):

a) des paraboles cubiques $y=(x-C)^3$;

b) des paraboles semi-cubiques $y^2=(x-C)^3$;

c) des paraboles de Neile $y^3=(x-C)^2$;

d) des strophoïdes $(a+x)(y-C)^2=x^2(a-x)$.

2070. L'équation de la trajectoire d'un projectile lancé du point O avec une vitesse initiale v_0 sous un angle α avec l'horizontale (on néglige la résistance de l'air) est

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

En prenant l'angle α comme paramètre, on demande de déterminer l'enveloppe de toutes les trajectoires du projectile situées dans un même plan vertical (« *parabole de sûreté* ») (fig. 83).

§ 17. Longueur d'un arc de courbe gauche

La *différentielle de l'arc* d'une courbe gauche en coordonnées cartésiennes est

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

où x, y, z sont les coordonnées courantes d'un point de la courbe.

Si

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

sont les équations paramétriques de la courbe gauche, la longueur de l'arc de courbe compris entre les valeurs $t = t_1$ et $t = t_2$ du paramètre est

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

On demande de calculer la longueur de l'arc de courbe dans les exercices n°s 2071-2076 :

2071. $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ de $t = 0$ à $t = 2$.

2072. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{3}{\pi} t$ de $t = 0$ à $t = \pi$.

2073. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ de $t = 0$ à t arbitraire.

2074. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ de $x = 0$ à $x = 6$.

2075. $x^3 = 3y$, $2xy = 9z$ du point O (0, 0, 0) jusqu'au point M (3, 3, 2).

2076. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$ du point O (0, 0, 0) jusqu'au point M (x_0, y_0, z_0).

2077. La position d'un point à un instant t ($t > 0$) quelconque est donnée par les équations

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$$

Déterminer la vitesse moyenne du mouvement entre le instants $t = 1$ et $t = 10$.

§ 18. Fonction vectorielle d'une variable scalaire

1°. Dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable scalaire. La *fonction vectorielle* $\vec{a} = \vec{a}(t)$ est définie quand on se donne trois fonctions scalaires $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$, ses projections sur les axes de coordonnées,

$$\vec{a} = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k}.$$

La dérivée d'une fonction vectorielle $\vec{a} = \vec{a}(t)$ par rapport à la variable scalaire t est une nouvelle fonction vectorielle définie par l'égalité

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\vec{k}.$$

Le module de la dérivée d'une fonction vectorielle est

$$\left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}.$$

L'extrémité du rayon vecteur variable $\vec{r} = \vec{r}(t)$ décrit une courbe gauche

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

appelée *hodographe* du vecteur $\vec{r}$.

La dérivée $\frac{d\vec{r}}{dt}$ est un vecteur tangent à l'hodographe au point correspondant, en outre

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt},$$

où s est la longueur de l'arc de l'hodographe comptée à partir d'une certaine origine. En particulier, $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.

Si le paramètre t est le temps, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ est le *vecteur vitesse* de l'extrémité du vecteur $\vec{r}$ et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}$ le *vecteur accélération* de l'extrémité du vecteur $\vec{r}$.

2°. Principales règles de dérivation des fonctions vectorielles d'une variable scalaire.

1) $\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} - \frac{d\vec{c}}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(m\vec{a}) = m\frac{d\vec{a}}{dt}$, où m est un scalaire constant;

3) $\frac{d}{dt}(\varphi a) = \frac{d\varphi}{dt}\vec{a} + \varphi\frac{d\vec{a}}{dt}$, où $\varphi(t)$ est une fonction scalaire de t;

4) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b} + \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}\vec{a}[\varphi(t)]=\frac{d\vec{a}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$;

7) $\vec{a}\frac{d\vec{a}}{dt}=0$ si $|\vec{a}|=\text{const}$.

Exemple 1. Le rayon vecteur d'un point mobile à un instant quelconque est donné par l'équation

$$\vec{r}=\vec{i}-4t^2\vec{j}+3t^2\vec{k}. \qquad (1)$$

Déterminer la trajectoire, la vitesse, l'accélération du mouvement.

Solution. L'équation (1) se transcrit comme suit

$$x=1,\quad y=-4t^2,\quad z=3t^2.$$

En éliminant le temps t, on trouve que la trajectoire du mouvement est la droite

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{3}.$$

On détermine la vitesse du mouvement en dérivant l'équation (1)

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=-8t\vec{j}+6t\vec{k}$$

et l'accélération du mouvement

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-8\vec{j}+6\vec{k}.$$

La grandeur de la vitesse est

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{(-8t)^2+(6t)^2}=10\,|t|.$$

Remarquons que l'accélération est constante et est égale à

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10.$$

2078. Démontrer que l'équation vectorielle $\vec{r}-\vec{r}_1=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,t$, où $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont les rayons vecteurs de deux points donnés, est celle d'une droite.

2079. Définir les hodographes des fonctions vectorielles suivantes :

a) $\vec{r}=\vec{a}t+\vec{c}$; c) $\vec{r}=\vec{a}\cos t+\vec{b}\sin t$;

b) $\vec{r}=\vec{a}t+\vec{b}t^2$; d) $\vec{r}=\vec{a}\,\mathrm{ch}\,t+\vec{b}\,\mathrm{sh}\,t$,

où $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont des vecteurs constants, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ étant perpendiculaires entre eux.

2080. Calculer la dérivée de la fonction vectorielle $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}^0(t)$, où $a(t)$ est une fonction scalaire et $\vec{a}^0(t)$ un vecteur unitaire lorsque $\vec{a}(t)$ est un vecteur variable: 1) seulement en longueur, 2) seulement en direction, 3) en longueur et en direction (cas général). Expliquer le sens géométrique des résultats obtenus.

2081. En utilisant les règles de dérivation des fonctions vectorielles par rapport à une variable scalaire, établir la formule de dérivation du produit mixte de trois fonctions vectorielles $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

2082. Trouver la dérivée par rapport au paramètre t du volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs

$\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$;

$\vec{b} = 2t\vec{i} - \vec{j} + t^3\vec{k}$;

$\vec{c} = -t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + \vec{k}$.

2083. L'équation du mouvement est

$$\vec{r} = 3\vec{i}\cos t + 4\vec{j}\sin t,$$

où t est le temps. Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mouvement. Construire la trajectoire du mouvement et les vecteurs vitesse et accélération pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

2084. L'équation du mouvement est

$$\vec{r} = 2\vec{i}\cos t + 2\vec{j}\sin t + 3\vec{k}t.$$

Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mouvement. Calculer les grandeurs de la vitesse et de l'accélération du mouvement et déterminer leurs directions pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

2085. L'équation du mouvement est

$$\vec{r} = \vec{i}\cos\alpha\cos\omega t + \vec{j}\sin\alpha\sin\omega t + \vec{k}\sin\omega t,$$

où α et ω sont des constantes et t le temps. Déterminer la trajectoire du mouvement, les grandeurs et les directions de la vitesse et de l'accélération du mouvement.

2086. L'équation du mouvement d'un projectile (négligeant la résistance de l'air) est

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\vec{k},$$

où $\vec{v}_0\{v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\}$ est la vitesse initiale. Déterminer la vitesse et l'accélération pour t arbitraire.

2087. Démontrer que si un point se déplace sur la parabole $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ de manière que la projection de la vitesse sur l'axe OX reste constante $\left(\frac{dx}{dt} = \text{const}\right)$, son accélération reste aussi constante.

2088. Un point se trouvant sur le filet d'une vis que l'on visse dans une poutre décrit l'hélice

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = h\theta,$$

où θ est l'angle de rotation de la vis, a le rayon de la vis et h la progression de la vis pour une rotation d'un radian. Déterminer la vitesse du mouvement de ce point.

2089. Déterminer la vitesse d'un point qui se trouve sur la circonférence d'une roue de rayon a, animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω constante de manière que son centre se déplace d'un mouvement rectiligne de vitesse constante v_0.

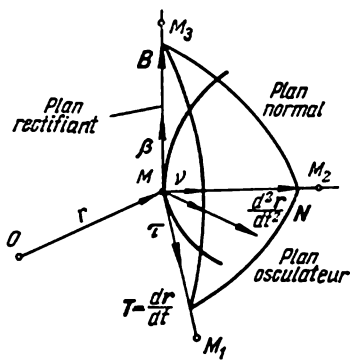


Fig. 84

§ 19. Trièdre naturel attaché à une courbe gauche

En chaque point non singulier $M(x, y, z)$ d'une courbe gauche $\vec{r} = \vec{r}(t)$, on peut attacher un *trièdre naturel* formé par trois plans réciproquement perpendiculaires (fig. 84):

1) le plan *osculateur* MM_1M_2 contenant les vecteurs $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$;

2) le plan *normal* MM_2M_3 perpendiculaire au vecteur $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et

3) le plan *rectifiant* MM_1M_3 perpendiculaire aux deux autres plans.

L'intersection de ces trois plans donne trois droites: 1) la *tangente* MM_1, 2) la *normale pricipale* MM_2, 3) la *binormale* MM_3, dé-

finies respectivement par les vecteurs:

1) $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (*vecteur de la tangente*);

2) $\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (*vecteur de la binormale*);

3) $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$ (*vecteur de la normale principale*).

Les vecteurs unitaires correspondants sont

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad \vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

et peuvent être calculés d'après les formules

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}; \quad \vec{\nu} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|}; \quad \vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}.$$

Si X, Y, Z sont les coordonnées courantes d'un point de la tangente, l'équation de la tangente est de la forme

$$\frac{X-x}{T_x} = \frac{Y-y}{T_y} = \frac{Z-z}{T_z}, \tag{1}$$

où $T_x = \frac{dx}{dt}$; $T_y = \frac{dy}{dt}$; $T_z = \frac{dz}{dt}$, de la condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan, on en déduit l'équation du plan normal

$$T_x(X-x) + T_y(Y-y) + T_z(Z-z) = 0. \tag{2}$$

En remplaçant dans les équations (1) et (2) T_x, T_y, T_z par B_x, B_y, B_z, et N_x, N_y, N_z on trouve respectivement les équations de la binormale et de la normale principale et respectivement celles du plan osculateur et du plan rectifiant.

Exemple 1. Déterminer les principaux vecteurs unitaires $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ de la courbe

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

au point $t = 1$.

Former les équations de la tangente, de la normale principale et de la binormale en ce point.

Solution. On a

$$\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$$

et

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}.$$

D'où, pour $t=1$:

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k};$$

$$\vec{B}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k};$$

$$\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -6 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-22\vec{i}-16\vec{j}+18\vec{k}.$$

Par conséquent,

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{14}},\quad \vec{\beta}=\frac{3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{19}},\quad \vec{\nu}=\frac{-11\vec{i}-8\vec{j}+9\vec{k}}{\sqrt{266}}.$$

Puisque pour $t=1$ on a $x=1$, $y=1$, $z=1$,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

est l'équation de la tangente,

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1},$$

l'équation de la binormale et

$$\frac{x-1}{-11}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{9},$$

l'équation de la normale principale.

Si l'équation de la courbe gauche est donnée par l'intersection de deux surfaces

$$F(x, y, z)=0;\quad G(x, y, z)=0,$$

à la place des vecteurs $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ on peut prendre les vecteurs $d\vec{r}\{dx, dy, dz\}$ et $d^2\vec{r}\{d^2x, d^2y, d^2z\}$, où une des variables x, y, z peut être considérée comme indépendante et sa différentielle seconde comme nulle.

E x e m p l e 2. Former l'équation du plan osculateur du cercle

$$x^2+y^2+z^2=6,\quad x+y+z=0 \tag{3}$$

au point M (1, 1, —2).

S o l u t i o n. On a, différentiant le système (3) et en considérant x comme variable indépendante,

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$
$$dx+dy+dz=0$$

et

$$dx^2+dy^2+y\,d^2y+dz^2+z\,d^2z=0,$$
$$d^2y+d^2z=0.$$

En faisant $x=1$, $y=1$, $z=-2$, on a

$$dy=-dx; \qquad dz=0;$$

$$d^2y=-\frac{2}{3}dx^2; \quad d^2z=\frac{2}{3}dx^2.$$

Par conséquent, le plan osculateur est défini par les vecteurs

$$\{dx, -dx, 0\} \text{ et } \{0, -\frac{2}{3}dx^2, \frac{2}{3}dx^2\}$$

ou

$$\{1, -1, 0\} \text{ et } \{0, -1, 1\}.$$

D'où le vecteur normal au plan osculateur:

$$\vec{B}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

et, par conséquent, son équation est

$$-1(x-1)-(y-1)-(z+2)=0,$$

c'est-à-dire

$$x+y+z=0,$$

ce à quoi on devait s'attendre, puisque notre courbe est située dans ce plan.

2090. Déterminer les principaux vecteurs unitaires $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ de la courbe

$$x=1-\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t$$

au point $t=\frac{\pi}{2}$.

2091. Déterminer les vecteurs unitaires de la tangente et de la normale principale en un point quelconque de la spirale conique

$$\vec{r}=e^t(\vec{i}\cos t+\vec{j}\sin t+\vec{k}).$$

Déterminer les angles formés par ces droites et l'axe OZ.

2092. Déterminer les principaux vecteurs unitaires $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ de la courbe

$$y=x^2, \quad z=2x$$

au point $x=2$.

2093. Former les équations des droites formant le trièdre naturel en un point arbitraire de l'hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

Déterminer les cosinus directeurs de la tangente et de la normale principale.

2094. Former les équations des plans définissant le trièdre naturel attaché à la courbe

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

au point M (1, 1, 2).

2095. Former les équations de la tangente, du plan normal et du plan osculateur à la courbe

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \text{ au point } M\ (2, 4, 8).$$

2096. Former les équations de la tangente, de la normale principale et de la binormale en un point quelconque de la courbe

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

Déterminer les points en lesquels la tangente à cette courbe est parallèle au plan $x + 3y + 2z - 10 = 0$.

2097. Former les équations de la tangente du plan osculateur, de la normale principale et de la binormale à la courbe

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

au point $t = 2$. Calculer les cosinus directeurs de la binormale en ce point.

2098. Former les équations de la tangente et du plan normal aux courbes suivantes:

a) $x = R \cos^2 t$, $y = R \sin t \cos t$, $z = R \sin t$ pour $t = \frac{\pi}{4}$;

b) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ au point (1, 1, 2);

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$ au point $(2, 2\sqrt{3}, 3)$.

2099. Former les équations du plan normal à la courbe $z = x^2 - y^2$, $y = x$ à l'origine des coordonnées.

2100. Former l'équation du plan osculateur à la courbe $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ au point $t = 0$.

2101. Former l'équation du plan osculateur aux courbes :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$ au point $(2, 1, 2)$;
b) $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$ au point $(6, 9, 9)$;
c) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ en un point quelconque (x_0, y_0, z_0).

2102. Former les équations du plan osculateur, de la normale principale et de la binormale à la courbe,

$$y^2 = x, \quad x^2 = z$$

au point $(1, 1, 1)$.

2103. Former les équations du plan osculateur, de la normale principale et de la binormale à l'hélice conique $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ à l'origine des coordonnées. Déterminer les vecteurs unitaires de la tangente, de la normale principale et de la binormale à l'origine des coordonnées.

§ 20. Courbure et torsion d'une courbe gauche

1°. Courbure. On appelle *courbure* d'une courbe au point M le nombre

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

où φ est l'angle formé par les tangentes (*angle de contingence*) aux extrémités de l'arc $\widehat{MN}$ de la courbe, Δs la longueur de cet arc. R s'appelle *rayon de courbure*. Si la courbe est donnée par une équation de la forme $\vec{r} = \vec{r}(s)$ où s est la longueur de l'arc, alors

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|.$$

Dans le cas d'une représentation paramétrique générale, on a

$$\frac{1}{R} = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^3}. \tag{1}$$

2°. T o r s i o n. On appelle *torsion* (*seconde courbure*) d'une courbe au point M le nombre

$$T=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s},$$

où θ est l'angle de rotation de la binormale (*angle de contingence de seconde espèce*) aux points de l'arc $\widehat{MN}$ de la courbe. La grandeur ρ s'appelle le *rayon de torsion* ou *rayon de seconde courbure*. Si $\vec{r}=\vec{r}(s)$,

$$\frac{1}{\rho}=\mp\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|=\frac{\dfrac{d\vec{r}}{ds}\,\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}}{\left(\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2},$$

où on prend le signe moins dans le cas où les vecteurs $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ et $\vec{\nu}$ ont la même direction et le signe plus dans le cas contraire.

Si $\vec{r}=\vec{r}(t)$, où t est un paramètre quelconque, alors

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}\,\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,\dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}. \tag{2}$$

E x e m p l e 1. Déterminer la courbure et la torsion de l'hélice

$$\vec{r}=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}\,a\sin t+\vec{k}\,bt \quad (a>0).$$

S o l u t i o n. On a

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=-\vec{i}a\sin t+\vec{j}a\cos t+\vec{k}b,$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\vec{i}a\cos t-\vec{j}a\sin t,$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}=-\vec{i}a\sin t-\vec{j}a\cos t.$$

D'où

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=\vec{i}ab\sin t-\vec{j}ab\cos t+a^2\vec{k}$$

et

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}=\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\\ a\sin t & -a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2b.$$

Par conséquent, d'après les formules (1) et (2), on a

$$\frac{1}{R}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

et

$$\frac{1}{\rho}=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2},$$

c'est-à-dire que la courbure et la torsion de l'hélice sont constantes.

3°. Formules de Frenet

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{\nu}}{R},\quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=-\frac{\vec{\tau}}{R}+\frac{\vec{\beta}}{\rho},\quad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\frac{\vec{\nu}}{\rho}.$$

2104. Démontrer que si la courbure en chaque point d'une courbe est nulle cette courbe est une droite.

2105. Montrer que si la torsion en chaque point d'une courbe est nulle, alors cette courbe est plane.

2106. Montrer que la courbe

$$x = 1 + 3t + 2t^2,\quad y = 2 - 2t + 5t^2,\quad z = 1 - t^2$$

est plane; déterminer le plan dans lequel elle se trouve.

2107. Calculer la courbure des courbes:

a) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \operatorname{ch} t$ au point $t = 0$;
b) $x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y^2 - 2x + z = 0$ au point $(1, 1, 1)$.

2108. Calculer la courbure et la torsion en un point arbitraire des courbes:

a) $x = e^t \cos t,\quad y = e^t \sin t,\quad z = e^t$;
b) $x = a \operatorname{ch} t,\quad y = a \operatorname{sh} t,\quad z = at$ (hélice hyperbolique).

2109. Déterminer les rayons de courbure et de torsion en un point arbitraire (x, y, z) des courbes:

a) $x^2 = 2ay,\quad x^3 = 6a^2z$;
b) $x^3 = 3p^2y,\quad 2xz = p^2$.

2110. Démontrer que les composantes tangentielle et normale de l'accélération w sont données par les formules

$$\vec{w}_\tau=\frac{dv}{dt}\vec{\tau},\quad \vec{w}_\nu=\frac{v^2}{R}\vec{\nu},$$

où v est la vitesse, R le rayon de courbure à la trajectoire, $\vec{\tau}$ et $\vec{\nu}$ sont les vecteurs unitaires de la tangente et de la normale principale à la courbe.

2111. Un point se déplace uniformément avec la vitesse v sur l'hélice $r = \vec{i}\, a \cos t + \vec{j}\, a \sin t + bt\vec{k}$. Calculer son accélération w.

2112. L'équation du mouvement est

$$\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}.$$

Déterminer aux instants $t = 0$ et $t = 1$: 1) la courbure de la trajectoire et 2) les composantes tangentielle et normale de l'accélération du mouvement.

CHAPITRE VII

INTÉGRALES MULTIPLES ET INTÉGRALES CURVILIGNES

§ 1. Intégrale double en coordonnées rectangulaires

1°. Calcul direct des intégrales doubles. *L'intégrale double* d'une fonction continue $f(x, y)$ étendue à un domaine fermé borné S est, par définition, la limite des sommes intégrales doubles correspondantes

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i \Delta y_k, \qquad (1)$$

où $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ et la somme étant étendue aux valeurs de i et de k telles que les points (x_i, y_k) appartiennent au domaine S.

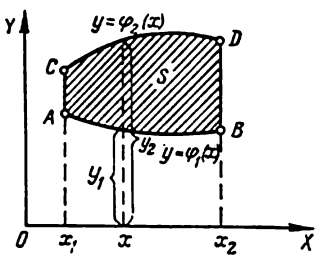


Fig. 85

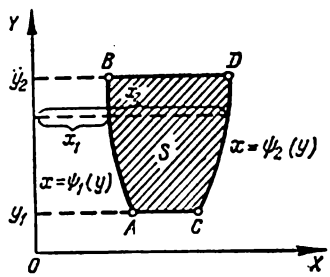


Fig. 86

2°. Ordre des limites d'intégration dans une intégrale double. On distingue deux types fondamentaux de domaines d'intégration.

1) Le domaine d'intégration S (fig. 85) est limité à gauche et à droite par les droites $x = x_1$ et $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, en bas et en haut par les courbes continues $y = \varphi_1(x)$ (AB) et $y = \varphi_2(x)$ (CD) $[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$ coupées par la droite $x = X$ $(x_1 \leqslant X \leqslant x_2)$ seulement en un point (voir fig. 85). Dans le domaine S la variable x varie de x_1 à x_2 et la variable y, pour x constant, de $y_1 = \varphi_1(x)$ à $y_2 = \varphi_2(x)$.

Le calcul de l'intégrale (1) peut se ramener à l'intégration d'une intégrale simple d'après la formule

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

où, quand on calcule $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$, la grandeur x est supposée constante.

2) Le domaine d'intégration S est limité inférieurement et supérieurement par les droites $y = y_1$ et $y = y_2$ ($y_2 > y_1$), à gauche et à droite par les courbes continues $x = \psi_1(y)$ (AB) et $x = \psi_2(y)$ (CD) $[\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)]$, coupées par la droite $y = Y$ ($y_1 \leqslant Y \leqslant y_2$) seulement en un point (fig. 86).

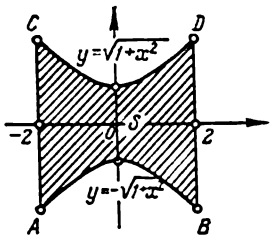


Fig. 87

De même que précédemment, on a

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx,$$

en outre, dans l'intégrale $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$ y est considérée constante.

Si le domaine d'intégration n'appartient pas à l'un des types de domaine que l'on vient de considérer, on tâche alors de le partager en domaines partiels dont chacun appartiendrait à l'un des deux types précités.

Exemple 1. Calculer l'intégrale

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 (x+y)\,dy.$$

Solution.

$$I = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1} dx = \int\limits_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2. Déterminer les limites d'intégration pour l'intégrale

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

si le domaine d'intégration S (fig. 87) est limité par l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ et par les deux droites $x = 2$ et $x = -2$ (on a en vue le domaine qui contient l'origine des coordonnées).

S o l u t i o n. Le domaine d'intégration $ABCD$ (fig. 87) est limité par les deux droites $x = -2$ et $x = 2$ et les deux branches d'hyperbole

$$y=\sqrt{1+x^2} \text{ et } y=-\sqrt{1+x^2},$$

c'est-à-dire que nous avons affaire à un domaine du premier type. On a

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy.$$

Calculer les intégrales doubles suivantes:

2113. $\int\limits_0^2 dy\,(x^2+2y)\,dx.$ 2117. $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx.$

2114. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$ 2118. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr.$

2115. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}.$ 2119. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2\sin^2\varphi\,dr.$

2116. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}.$ 2120. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy.$

Ecrire les équations des courbes limitant les domaines auxquels sont étendues les intégrales doubles ci-dessous et dessiner ces domaines:

2121. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\,dx.$ 2124. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)\,dy.$

2122. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x, y)\,dy.$ 2125. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\,dy.$

2123. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_y^{10-y} f(x, y)\,dx.$ 2126. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x, y)\,dy.$

Indiquer les limites d'intégration dans l'un et l'autre ordre dans l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

pour les domaines S indiqués ci-dessous.

2127. S est un rectangle de sommets O (0, 0), A (2, 0), B (2, 1), C (0, 1).

2128. S est le triangle de sommets O (0, 0), A (1, 0), B (1, 1).

2129. S est le trapèze de sommets O (0, 0), A (2, 0), B (1, 1), C (0, 1).

2130. S est le parallélogramme de sommets A (1, 2), B (2, 4), C (2, 7), D (1, 5).

2131. S est le secteur circulaire OAB de centre au point O (0. 0) et dont les extrémités de l'arc de cercle sont les points A (1, 1) et B (—1, 1) (fig. 88).

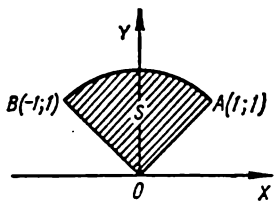


Fig. 88

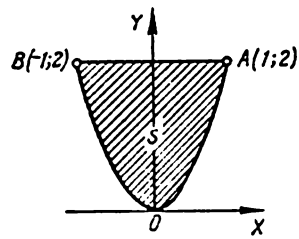


Fig. 89

2132. S est le segment parabolique droit AOB, limité par la parabole BOA et le segment de la droite BA, passant par les points B (—1, 2) et A (1, 2) (fig. 89).

2133. S est la couronne circulaire limitée par deux circonférences de rayons $r = 1$ et $R = 2$ de centre commun O (0, 0).

2134. S est limité par l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ et la circonférence $x^2 + y^2 = 9$ (on a en vue le domaine qui contient l'origine des coordonnées).

2135. Indiquer les limites d'intégration dans l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Si le domaine S est défini par les inégalités

a) $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x + y \leqslant 1$; d) $y \geqslant x$; $x \geqslant -1$; $y \leqslant 1$;
b) $x^2 + y^2 \leqslant a^2$; e) $y \leqslant x \leqslant y + 2a$;
c) $x^2 + y^2 \leqslant x$; $0 \leqslant y \leqslant a$.

Changer l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles suivantes:

2136. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy$.

2137. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy$.

2138. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

2139. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\, dy$.

2140. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\, dy$.

2141. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx$.

2142. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx$.

2143. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

2144. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\, dy$.

Calculer les intégrales doubles suivantes:

2145. $\iint\limits_{(S)} x\, dx\, dy$, où S est le triangle de sommets $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ et $B(0, 1)$.

2146. $\iint\limits_{(S)} x\, dx\, dy$, où le domaine d'intégration S est limité par la droite qui passe par les points A (2, 0), B (0, 2) et l'arc de cercle de centre au point C (0, 1) et de rayon 1 (fig. 90).

2147. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, où S est la partie du cercle de rayon a de centre au point $O(0, 0)$ appartenant au premier quart de plan.

2148. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, où S est le triangle de sommets $O(0, 0)$, $A(1, -1)$ et $B(1, 1)$.

2149. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, où S est le triangle de sommets $O(0, 0)$, $A(10, 1)$ et $B(1, 1)$.

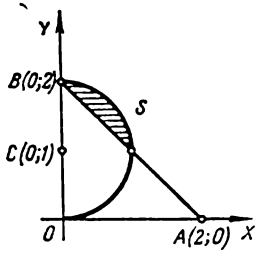


Fig. 90

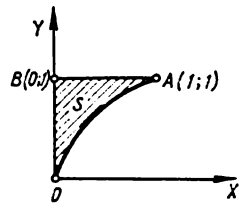


Fig. 91

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, où S est un triangle curviligne OAB, limité par la parabole $y^2=x$ et les droites $x=0$, $y=1$ (fig. 91).

2151. $\iint\limits_{(S)} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, où S est le segment de parabole limité par la parabole $y=\frac{x^2}{2}$ et la droite $y=x$.

2152. Calculer les intégrales et dessiner les domaines auxquels elles sont étendues :

a) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\,dy$;

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{1} y^4\,dy$; c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y\,dx$.

On recommande de faire préalablement le dessin pour les exercices n°s 2153-2157.

2153. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} xy^2\,dx\,dy$$

si S est le domaine limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$.

2154*. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy$$

étendue au domaine S limité par l'axe OX et le demi-cercle supérieur $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

2155. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}},$$

où S est le cercle de rayon a tangent aux axes de coordonnées et se trouvant dans le premier quart de plan.

2156*. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

où S est le domaine limité par l'axe des abscisses et un arc de cycloïde

$$x = R\,(t - \sin t),$$
$$y = R\,(1 - \cos t).$$

2157. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

où le domaine d'intégration S est limité par les axes des coordonnées et l'arc d'astroïde

$$x = R\cos^3 t, \quad y = R\sin^3 t\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2158. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x, y) = xy^2$ sur le domaine $S\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Indication. On appelle *valeur moyenne de la fonction* $f(x, y)$ sur le domaine S le nombre défini comme suit:

$$\bar{f} = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2159. Calculer la valeur moyenne du carré de la distance du point $M(x; y)$ du cercle $(x-a)^2+y^2 \leqslant R^2$ à l'origine des coordonnées.

§ 2. Changement de variables dans une intégrale double

1°. Intégrale double en coordonnées polaires. Lorsqu'on passe dans une intégrale double en coordonnées rectangulaires (x, y) aux coordonnées polaires (r, φ), liées aux coordonnées rectangulaires par les formules

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

on a la formule

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{1}$$

Si le domaine d'intégration (S) est limité par les rayons $r=\alpha$ et $r=\beta$ $(\alpha<\beta)$ et les courbes $r=r_1(\varphi)$ et $r=r_2(\varphi)$ où $r_1(\varphi)$ et $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ sont des fonctions uniformes sur le segment $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, on peut alors calculer l'intégrale double d'après la formule:

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi, r)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr$$

où $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Quand on calcule l'intégrale

$$\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr,$$

φ est supposée constante.

Si le domaine d'intégration n'appartient pas aux cas considérés, on le partage en domaines du type considéré.

2°. Intégrale double en coordonnées curvilignes. Dans le cas plus général, si dans l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

on a besoin de passer des coordonnées x, y aux coordonnées u, v liées aux coordonnées x, y par des fonctions continues et différentiables

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

réalisant une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points du domaine S du plan XY et les points du domaine S' du plan UV,

et le *jacobien*

$$I=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

conservant un signe constant dans le domaine S, alors la formule suivante

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(S')} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|I|\,du\,dv$$

est vraie.

Les limites de la nouvelle intégrale se déterminent suivant la règle générale d'après la forme du domaine S'.

Exemple 1. Après avoir passé aux coordonnées polaires, calculer

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

où le domaine S est le cercle de rayon $R=1$ de centre à l'origine des coordonnées (fig. 92).

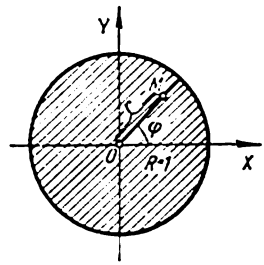


Fig. 92

Solution. En posant $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, on a

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=$$
$$=\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}=\sqrt{1-r^2}.$$

Puisque, dans le domaine S, la coordonnée r pour φ arbitraire varie de 0 à 1, et φ varie de 0 à 2π, on a

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2}{3}\pi.$$

Passer aux coordonnées polaires r et φ et indiquer les limites d'intégration par rapport aux nouvelles coordonnées dans les intégrales suivantes:

2160. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\,dy.$

2161. $\int_0^2 dx \int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

2162. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$,

où S est le triangle limité par les droites $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

2163. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right) dy$.

2164. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$, où S est le domaine limité par la lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

2165. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} y\, dx\, dy$$

après avoir passé aux coordonnées polaires, où S est le demi-cercle de diamètre a et de centre au point $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ (fig. 93).

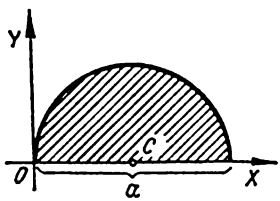


Fig. 93

2166. Après avoir passé aux coordonnées polaires, calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

étendue au domaine limité par la circonférence $x^2 + y^2 = 2ax$.

2167. Après avoir passé aux coordonnées polaires, calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

où le domaine d'intégration S est le demi-cercle de rayon a et de centre à l'origine des coordonnées situé au-dessus de l'axe OX.

2168. Calculer l'intégrale double de la fonction $f(r, \varphi) = r$ sur le domaine limité par la cardioïde $r = a(1 + \cos \varphi)$

et la circonférence $r = a$. (On a en vue le domaine qui ne contient pas le pôle).

2169. Calculer l'intégrale

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy,$$

en passant aux coordonnées polaires.

2170. Calculer l'intégrale

$$\iint_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

en passant aux coordonnées polaires, où le domaine S est une boucle de la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad (x \geqslant 0).$$

2171*. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{(S)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

étendue au domaine S limité par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, en passant aux *coordonnées polaires généralisées*

$$\frac{x}{a} = r\cos\varphi, \qquad \frac{y}{b} = r\sin\varphi.$$

2172.** Transformer

$$\int_0^c dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy$$

($0 < \alpha < \beta$ et $c > 0$) en introduisant les nouvelles variables $u = x + y$, $uv = y$.

2173*. Effectuer le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ dans l'intégrale

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy.$$

2174**. Calculer l'intégrale double

$$\iint\limits_{(S)} dx\,dy,$$

où S est le domaine limité par la courbe

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}.$$

Indication. Effectuer le changement de variables

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

§ 3. Calcul des aires

1°. Aires en coordonnées rectangulaires. L'aire d'une figure plane S est

$$S=\iint\limits_{(S)} dx\,dy.$$

Si le domaine S est donné par les inégalités $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, on a

$$S=\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2°. Aire en coordonnées polaires. Si le domaine S en coordonnées polaires r et φ est donné par les inégalités $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\leqslant r \leqslant F(\varphi)$, on a

$$S=\iint\limits_{(S)} r\,d\varphi\,dr=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} r\,dr.$$

2175. Construire les domaines dont les aires sont données par les intégrales:

$$\text{a)}\ \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy; \qquad \text{b)}\ \int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx.$$

Calculer ces aires et changer l'ordre d'intégration.

2176. Construire les domaines dont les aires sont données par les intégrales :

$$\text{a)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{0}^{3 \sec \varphi} r\,dr; \qquad \text{b)} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$$

Calculer ces aires.

2177. Calculer l'aire de la figure limitée par les droites $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$ $(a > 0)$.

2178. Calculer l'aire de la figure située au-dessus de l'axe OX et limitée par cet axe, la parabole $y^2 = 4ax$ et la droite $x + y = 3a$.

2179*. Calculer l'aire de l'ellipse

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

2180. Calculer l'aire de la figure limitée par les paraboles

$$y^2 = 10x + 25 \text{ et } y^2 = -6x + 9.$$

2181. Après avoir passé aux coordonnées polaires, calculer l'aire de la figure limitée par les courbes

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

2182. Calculer l'aire de la figure limitée par la droite $r \cos \varphi = 1$ et la circonférence $r = 2$. (On a en vue la figure qui ne contient pas le pôle).

2183. Calculer l'aire de la figure limitée par les courbes

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad \text{et} \quad r = a \cos \varphi \quad (a > 0).$$

2184. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

2185*. Calculer l'aire intérieure à l'ellipse

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100.$$

2186. Calculer l'aire du quadrilatère curviligne limité par les arcs de paraboles $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$.

I n d i c a t i o n. Introduire les nouvelles variables u et v en posant

$$x^2 = uy, \quad y^2 = vx.$$

2187. Calculer l'aire du quadrilatère curviligne limité par les arcs de courbes $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$.

I n d i c a t i o n. Introduire les nouvelles variables u et v en posant $xy = u$, $y^2 = vx$.

§ 4. Calcul des volumes

Le volume V d'un cylindre limité supérieurement par une surface continue $z = f(x, y)$, inférieurement par le plan $z = 0$ et latéralement par une surface cylindrique droite ayant pour trace sur le plan XOY le domaine S (fig. 94) est

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

2188. Exprimer à l'aide d'une intégrale double le volume de la pyramide de sommets O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (1, 1, 0) et C (0, 0, 1) (fig. 95). Indiquer les limites d'intégration.

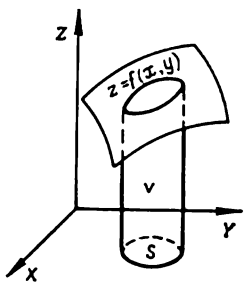


Fig. 94

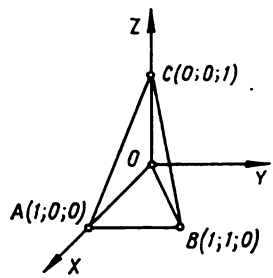


Fig. 95

Pour les exercices n°s 2189-2192 dessiner le corps dont le volume est donné par les intégrales doubles:

2189. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy.$ **2191.** $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\, dy.$

2190. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4 - x - y)\, dy.$ **2192.** $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{2-x}^{2} (4 - x - y)\, dy.$

2193. Dessiner le corps dont le volume est donné par l'intégrale

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy,$$

et, à l'aide de considérations géométriques, calculer cette intégrale.

2194. Calculer le volume du corps limité par le paraboloïde elliptique $z = 2x^2 + y^2 + 1$, le plan $x + y = 1$ et les plans de coordonnées.

2195. Un corps est limité par le paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$ et les plans $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$. Calculer son volume.

2196. Un corps est limité par le cylindre $x^2 + z^2 = a^2$ et les plans $y = 0$, $z = 0$, $y = x$. Calculer son volume.

Calculer les volumes des corps limités par les surfaces suivantes:

2197. $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

2198. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

2199. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

2200. $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.

2201. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.

2202. $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$.

Employer les coordonnées polaires et les coordonnées polaires généralisées pour les exercices n°s 2203-2211.

2203. Calculer le volume total du corps intérieur au cylindre $x^2 + y^2 = a^2$ et l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2204. Calculer le volume total du corps intérieur au cône $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ et l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2205. Calculer le volume du corps limité par les surfaces

$$2az = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = a^2, \quad z = 0.$$

2206. Calculer le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2207. Calculer le volume du corps limité par le paraboloïde $2az = x^2 + y^2$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. (On a en vue le volume intérieur au paraboloïde.)

2208. Calculer le volume du corps limité par le plan XOY, le cylindre $x^2 + y^2 = 2ax$ et le cône $x^2 + y^2 = z^2$.

2209. Calculer le volume du corps limité par le plan XOY, la surface $z = ae^{-(x^2+y^2)}$ et le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$.

2210. Calculer le volume du corps limité par le plan XOY, le paraboloïde $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ et le cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$.

2211. Dans quel rapport l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ partage le volume de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

2212*. Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).

§ 5. Calcul des aires des surfaces

L'*aire* σ d'une surface uniforme à plan tangent variant continûment $z = f(x, y)$ et de projection sur le plan XOY le domaine S est

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

2213. Calculer l'aire de la portion de plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ comprise entre les plans de coordonnées.

2214. Calculer l'aire de la portion de la surface du cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ ($z \geqslant 0$) comprise entre les plans $z = mx$ et $z = nx$ ($m > n > 0$).

2215*. Calculer l'aire de la portion de la surface du cône $x^2 - y^2 = z^2$ comprise dans le premier dièdre et limitée par le plan $y + z = a$.

2216. Calculer l'aire de la portion de la surface du cylindre $x^2 + y^2 = ax$ découpée par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2217. Calculer l'aire de la portion de la surface de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ découpée par la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2218. Calculer l'aire de la portion de la surface du paraboloïde $y^2 + z^2 = 2ax$ comprise entre le cylindre $y^2 = ax$ et le plan $x = a$.

2219. Calculer l'aire de la portion de la surface du cylindre $x^2 + y^2 = 2ax$ comprise entre le plan XOY et le cône $x^2 + y^2 \quad z^2$.

2220*. Calculer l'aire de la portion de la surface du cône $x^2 - y^2 = z^2$ intérieure au cylindre $x^2 + y^2 = 2ax$.

2221*. Démontrer que les aires des portions des surfaces des paraboloïdes $x^2 + y^2 = 2az$ et $x^2 - y^2 = 2az$ découpées par le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ sont égales.

2222*. On découpe une boule de rayon a par deux cylindres circulaires tangents le long d'un des diamètres de la boule et de diamètre de base égal au rayon de la boule. Calculer le volume et l'aire de la surface restante de la boule.

2223*. On découpe dans une sphère de rayon a une ouverture de base carrée de côté égal à a. L'axe de l'ouverture coïncide avec le diamètre de la boule. Calculer l'aire de la portion de sphère découpée par l'ouverture.

2224*. Calculer l'aire de la portion de l'hélice $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ contenue dans $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ et intérieure aux cylindres $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 = b^2$.

§ 6. Applications mécaniques de l'intégrale double

1°. Masse et moments statiques d'une plaque. Si S est un domaine du plan XOY et $\rho(x, y)$ la densité superficielle de cette plaque au point (x, y), alors la masse M de cette plaque et ses moments statiques M_X et M_Y par rapport aux axes OX et OY sont donnés par les intégrales doubles

$$M = \iint\limits_{(S)} \rho(x, y)\, dx\, dy, \quad M_X = \iint\limits_{(S)} y\rho(x, y)\, dx\, dy,$$

$$M_Y = \iint\limits_{(S)} x\rho(x, y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Si la plaque est homogène, on a $\rho(x, y) = \text{const}$.

2°. Coordonnées du centre de gravité d'une plaque. Si $C(\bar{x}, \bar{y})$ est le centre de gravité d'une plaque, on a

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

où M est la masse de la plaque et M_X, M_Y ses moments statiques par rapport aux axes des coordonnées (voir 1°). Si la plaque est homogène, on peut poser $\rho = 1$ dans les formules (1).

3°. Moments d'inertie d'une plaque. Les moments d'inertie d'une plaque par rapport aux axes OX et OY sont respectivement

$$I_X = \iint\limits_{(S)} y^2 \rho(x, y)\, dx\, dy, \quad I_Y = \iint\limits_{(S)} x^2 \rho(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2)$$

Le moment d'inertie d'une plaque par rapport à l'origine des coordonnées est

$$I_0 = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dx\, dy = I_X + I_Y. \qquad (3)$$

En faisant $\rho(x, y) = 1$ dans les formules (2) et (3), on a les moments d'inertie géométriques d'une figure plane.

2225. Déterminer la masse d'une plaque circulaire de rayon R si sa densité en un point quelconque est proportionnelle à la distance de ce point au centre et est égale à δ sur le bord de la plaque.

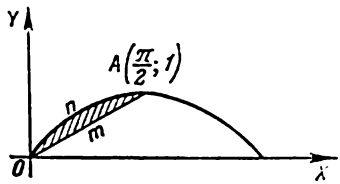


Fig. 96

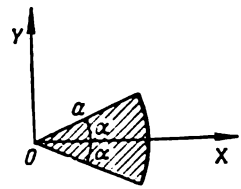


Fig. 97

2226. Une plaque a la forme d'un triangle rectangle de côtés $OB = a$ et $OA = b$; en outre, sa densité en un point quelconque est égale à la distance de ce point au côté OA. Calculer les moments statiques de la plaque par rapport aux côtés OA et OB.

2227. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure $OmAnO$ (fig. 96) limitée par la courbe $y = \sin x$ et la droite OA qui passe par le centre des coordonnées et le sommet $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ de la sinusoïde.

2228. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par la cardioïde $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2229. Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un secteur circulaire de rayon a et d'angle au sommet 2α (fig. 97).

2230. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les paraboles $y^2 = 4x + 4$ et $y^2 = -2x + 4$.

2231. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe OX du triangle limité par les droites $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$.

2232. Déterminer le moment d'inertie d'une couronne cylindrique de diamètres d et D $(d < D)$: a) par rapport à son centre et b) par rapport à son diamètre.

2233. Calculer le moment d'inertie d'un carré de côté a par rapport à l'axe qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan du carré.

2234*. Calculer le moment d'inertie par rapport à la droite $y = -a$ du segment de parabole $y^2 = ax$, délimité par la droite $x = a$.

2235*. Calculer le moment d'inertie par rapport à la droite $x = y$ de la figure limitée par l'hyperbole $xy = 4$ et la droite $x + y = 5$.

2236*. Dans une plaque carrée de côté a, la densité en un point quelconque est proportionnelle à la distance de ce point à l'un de ses sommets. Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un des côtés qui passent par ce sommet.

2237. Calculer le moment d'inertie de la cardioïde $r = a(1 + \cos\varphi)$ par rapport au pôle.

2238. Calculer le moment d'inertie de la figure limitée par la lemniscate $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan et qui passe par le pôle.

2239*. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe OX d'une plaque homogène limitée par un arc de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ et l'axe OX.

§ 7. Intégrales triples

1°. Intégrale triple en coordonnées rectangulaires. L'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z)$ étendue au domaine V est, par définition, la limite des sommes intégrales triples correspondantes:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Le calcul de l'intégrale triple se ramène au calcul successif de trois intégrales simples ou au calcul d'une intégrale double et d'une intégrale simple.

Exemple 1. Calculer

$$I=\iiint\limits_{(V)} x^3y^2z\,dx\,dy\,dz,$$

où le domaine V est défini par les inégalités

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x,\quad 0\leqslant z\leqslant xy.$$

Solution. On a

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} x^3y^2z\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x x^3y^2\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{xy} dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x \frac{x^5y^4}{2}\,dy=\int\limits_0^1 \frac{x^5}{2}\,\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^x dx=\int\limits_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx=\frac{1}{110}.$$

Exemple 2. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz$$

étendue à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Solution.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-a}^{a} x^2\,dx\iint\limits_{(S_{yz})} dy\,dz=\int\limits_{-a}^{a} x^2S_{yz}\,dx,$$

où S_{yz} est la figure limitée par l'ellipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$, $x=$ $=\text{const}$, et est égale à

$$S_{yz}=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

On a donc finalement :

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\pi bc\int\limits_{-a}^{a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

2°. Changement de variables dans une intégrale triple. Si dans l'intégrale triple

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz$$

on a besoin de passer des coordonnées x, y, z aux coordonnées u, v, w qui sont reliées aux coordonnées x, y, z par les fonctions $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, où les fonctions φ, ψ, χ:

1) sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières,

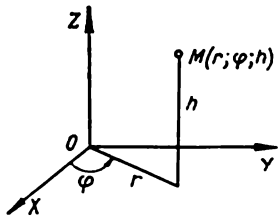


Fig. 98

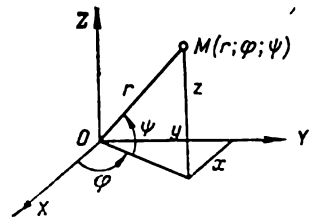


Fig. 99

2) établissent une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points du domaine d'intégration V dans l'espace XYZ et les points d'un certain domaine V' dans l'espace UVW,

3) ont un déterminant fonctionnel (jacobien)

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

qui conserve un signe constant dans le domaine V, alors on peut se servir de la formule

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]\, |I|\, du\, dv\, dw.$$

En particulier, 1) pour les coordonnées cylindriques r, φ, h (fig. 98), où

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h,$$

on trouve que $I = r$,

2) pour les coordonnées sphériques φ, ψ, r (φ est la longitude, ψ la latitude, r le rayon vecteur) (fig. 99), où

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi,$$

on a $I = r^2\cos\psi$.

Exemple 3. Après avoir passé aux coordonnées sphériques, calculer

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

où V est la boule de rayon R.

Solution. Pour la boule, les limites de variation des coordonnées sphériques φ (longitude), ψ (latitude) et r (rayon vecteur) sont

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Donc, on a

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r\, r^2 \cos\psi\, dr = \pi R^4.$$

3°. Applications des intégrales triples. Le *volume* d'un domaine à trois dimensions de l'espace XYZ est

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz.$$

La *masse* d'un corps occupant un domaine V est

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

où $\gamma(x, y, z)$ est la densité du corps aux points (x, y, z).

Les *moments statiques* d'un corps par rapport aux plans de coordonnées sont

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz.$$

Les *coordonnées du centre de gravité* sont

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Si le corps est homogène, on pose $\gamma(x, y, z) = 1$ dans les formules qui donnent les coordonnées du centre de gravité.

Les *moments d'inertie* par rapport aux axes de coordonnées sont

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

En faisant dans ces formules $\gamma(x, y, z) = 1$, on trouve les moments d'inertie géométriques du corps.

A. *Calcul des intégrales triples*

Indiquer les limites d'intégration dans l'intégrale triple

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

pour les domaines V suivants.

2240. V est le tétraèdre limité par les plans

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

2241. V est le cylindre limité par les surfaces

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad y = 0, \quad z = H.$$

2242*. V est le cône limité par les surfaces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$$

2243. V est le volume limité par les surfaces

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$

Calculer les intégrales suivantes:

2244. $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x + y + z + 1}}.$

2245. $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{4x - y^2}{2}}} x\, dz.$

2246. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\,dz$.

2248. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3},$$

où V est le domaine d'intégration limité par les plans de coordonnées et le plan $x+y+z=1$.

2249. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz,$$

où V (domaine d'intégration) est la portion commune au paraboloïde $2az \geqslant x^2+y^2$ et à la boule $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2$.

2250. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

où V (domaine d'intégration) est la portion commune aux boules $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ et $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2251. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

où V est le domaine limité par le plan $z=0$ et la demi-ellipsoïde supérieure $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2252. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

où V est l'intérieur de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2253. Calculer

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

où V (domaine d'intégration) est limité par le cône $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ et le plan $z=h$.

2254. Après avoir passé aux coordonnées cylindriques, calculer :

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

où V est le domaine limité par les surfaces $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ et contenant le point $(0, 0, R)$.

2255. Calculer

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

après avoir passé aux coordonnées cylindriques.

2256. Calculer

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz,$$

après avoir passé aux coordonnées cylindriques.

2257. Calculer

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz,$$

après avoir passé aux coordonnées sphériques.

2258. Après avoir passé aux coordonnées sphériques, calculer l'intégrale

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

où V est l'intérieur de la boule $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

B. *Calcul des volumes à l'aide des intégrales triples*

2259. Calculer, à l'aide d'une intégrale triple, le volume du corps limité par les surfaces

$$y^2 = 4a^2 - 3ax, \quad y^2 = ax, \quad z = \pm h.$$

2260**. Calculer le volume de la portion du cylindre $x^2 + y^2 = 2ax$ comprise entre le paraboloïde $x^2 + y^2 = 2az$ et le plan XOY.

2261*. Calculer le volume du corps limité par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et le cône $z^2 = x^2 + y^2$ (l'extérieur par rapport au cône).

2262*. Calculer le volume du corps limité par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et le paraboloïde $x^2 + y^2 = 3z$ (l'intérieur par rapport au paraboloïde).

2263. Calculer le volume du corps limité par le plan XOY, le cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (l'intérieur par rapport au cylindre).

2264. Calculer le volume du corps limité par le paraboloïde $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ et le plan $x = a$.

C. *Applications mécaniques et physiques des intégrales triples*

2265. Déterminer la masse M d'un parallélépipède rectangle $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, si la densité au point (x, y, z) est $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

2266. On découpe dans la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ un corps $OABC$ limité aux plans de coordonnées et au plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \leqslant c,\ b \leqslant c)$ (fig. 100). Déterminer la masse de ce corps si la densité en chaque point (x, y, z) est égale à la cote de ce point.

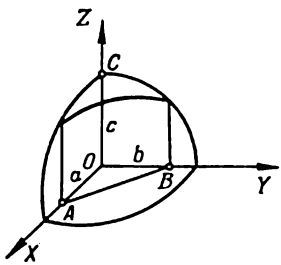


Fig. 100

2267*. Dans un corps ayant la forme d'une demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, la densité d'un point quelconque varie proportionnellement à la distance de ce point au centre de la sphère. Déterminer le centre de gravité de ce corps.

2268. Déterminer le centre de gravité d'un corps limité par le paraboloïde $y^2 + 2z^2 = 4x$ et le plan $x = 2$.

2269*. Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre circulaire de hauteur h et de rayon de base a par rapport à l'axe servant de diamètre à la base du cylindre.

2270*. Déterminer le moment d'inertie d'un cône circulaire de hauteur h, de base a et de densité ρ par rapport au diamètre de la base.

2271**. Déterminer la force d'attraction exercée par un cône homogène de hauteur h, d'angle au sommet α (suivant la section axiale) sur un point matériel de masse unité situé au sommet du cône.

2272**. Montrer que la force d'attraction d'une boule homogène sur un point matériel extérieur à la boule ne varie pas si toute la masse de la boule est concentrée en son centre.

§ 8. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre. Intégrales multiples impropres

1°. Dérivation par rapport à un paramètre. Si certaines restrictions sur les fonctions $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha(x, \alpha)$ et des intégrales impropres correspondantes sont vérifiées, on a alors la *règle de Leibniz*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

Exemple 1. Calculer en dérivant par rapport au paramètre

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Solution. Posons

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Alors

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}.$$

D'où $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C(\beta)$. Pour déterminer $C(\beta)$, faisons dans cette dernière égalité $\alpha = \beta$. On trouve $0 = -\frac{1}{2}\ln\beta + C(\beta)$.

D'où $C(\beta)=\frac{1}{2}\ln\beta$. Par conséquent,

$$F(\alpha, \beta)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

2°. Intégrales doubles et triples impropres.

a) Cas d'un domaine infini. Si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine infini S, on pose

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{\sigma\to S}\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

où σ est un domaine fini complètement intérieur à S, $\sigma\to S$ signifie que nous dilatons le domaine σ suivant une loi arbitraire de manière qu'il englobe tous les points du domaine S. Si la limite du second membre existe et est indépendante du choix du domaine σ, on dit que l'intégrale impropre correspondante est *convergente*, dans le cas contraire *divergente*.

Si la fonction à intégrer $f(x, y)$ est non negative ($f(x, y)\geqslant 0$), alors, pour la convergence de l'intégrale impropre, il est nécessaire et suffisant que la limite du second membre de l'égalité (1) existe au moins pour un système de domaines σ couvrant le domaine S.

b) Cas des fonctions discontinues. Si la fonction $f(x, y)$ est partout continue sur le domaine ferme fini S sauf au point $P(a, b)$, on pose

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{(S_\varepsilon)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

où S_ε est le domaine obtenu du domaine S en y retranchant un petit domaine de diamètre ε contenant le point P. Au cas où la limite (2) existe indépendamment de la forme des domaines retranchés, l'intégrale impropre considérée est dite *convergente* et dans le cas contraire *divergente*.

Si $f(x, y)\geqslant 0$, la limite du second membre de l'égalité (2) ne dépend pas de la forme des domaines retranchés; en particulier, on peut prendre les cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ et de centre au point P.

Les notions d'intégrales doubles impropres se définissent facilement dans le cas des intégrales triples.

Exemple 2. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}, \tag{3}$$

où S est tout le plan XOY.

S o l u t i o n. Soit σ un cercle de rayon ρ et de centre à l'origine des coordonnées. En passant aux coordonnées polaires, on a pour $p \neq 1$:

$$I(\sigma)=\iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^p}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\frac{(1+r^2)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_0^{\rho} d\varphi=\frac{\pi}{1-p}\,[(1+\rho^2)^{1-p}-1].$$

Si $p<1$, alors $\lim\limits_{\sigma\to S} I(\sigma)=\lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma)=\infty$ et l'intégrale diverge. De même, si $p>1$, alors $\lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma)=\frac{\pi}{p-1}$ et l'intégrale converge. Pour $p=1$ on a

$$I(\sigma)=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \frac{r\,dr}{1+r^2}=\pi \ln(1+\rho^2);\ \lim_{\rho\to\infty} I(\sigma)=\infty,$$

c'est-à-dire que l'intégrale diverge.

Ainsi, l'intégrale (3) converge pour $p>1$.

2273. Calculer $f'(x)$, si

$$f(x)=\int\limits_x^{\infty} e^{-xy^2}\,dy \quad (x>0).$$

2274. Démontrer que la fonction

$$u=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(z)}{x^2+(y-z)^2}\,dz$$

satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

2275. La transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ est donnée par la formule

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Calculer $F(p)$ si: a) $f(t)=1$; b) $f(t)=e^{\alpha t}$; c) $f(t)=\sin\beta t$; d) $f(t)=\cos\beta t$.

2276. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx$$

à l'aide de la formule

$$\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0).$$

2277*. A l'aide de la formule

$$\int_0^\infty e^{-pt} \, dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0),$$

calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty t^2 e^{-pt} \, dt.$$

En appliquant la dérivation par rapport au paramètre, calculer les intégrales suivantes:

2278. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \, dx \quad (\alpha > 0, \ \beta > 0).$

2279. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx \quad (\alpha > 0, \ \beta > 0).$

2280. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx.$

2281. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (|\alpha| < 1).$

2282. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx \quad (\alpha \geqslant 0).$

Calculer les intégrales impropres suivantes:

2283. $\displaystyle\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x+y)} \, dy.$

2284. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx.$

2285. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$, où S est le domaine défini par les inégalités $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

2286*. $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+y^2+a^2)^2}$ $(a>0)$.

2287. L'*intégrale d'Euler-Poisson* définie par la formule $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$ peut encore s'écrire $I=\int\limits_0^\infty e^{-y^2} dy$. Calculer I en multipliant ces formules puis en passant aux coordonnées polaires.

2288. Calculer $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

Etudier la convergence des intégrales doubles impropres:

2289**. $\iint\limits_{(S)} \ln \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, où S est le cercle $x^2+y^2 \leqslant 1$.

2290. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, où S est le domaine défini par l'inégalité $x^2+y^2 \geqslant 1$ (« extérieur » du cercle).

2291*. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, où S est le carré $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

2292. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, où V est le domaine défini par l'inégalité $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ (« extérieur » de la boule).

§ 9. Intégrales curvilignes

1°. Intégrales curvilignes de première espèce. Soit $f(x, y)$ une fonction continue et soit $y = \varphi(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ l'équation d'une courbe C à tangente variant continûment.

Choisissons un système de points $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ qui divisent la courbe C en arcs élémentaires $M_{i-1}M_i = \Delta s_i$

et formons la somme intégrale $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i$. La limite de ces sommes pour $n \to \infty$ avec $\max \Delta s_i \to 0$ est, par définition, l'*intégrale curviligne de première espèce*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i = \int_C f(x, y)\,ds$$

(ds est la différentielle de l'arc) et se calcule d'après la formule

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx.$$

Dans le cas où la courbe C est donnée sous forme paramétrique $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $[\alpha \leqslant t \leqslant \beta]$, on a

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

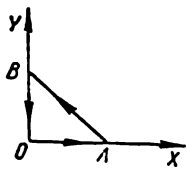


Fig. 101

On considère aussi les intégrales curvilignes de première espèce des fonctions de trois variables $f(x, y, z)$ prises sur une courbe gauche et qui se calculent de manière analogue. L'intégrale curviligne de première espèce est *indépendante du sens de parcours du chemin d'intégration*; si la fonction à intégrer f est interprétée comme la densité linéaire de la courbe d'intégration C, cette intégrale représente la *masse de la courbe C*.

Exemple 1. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (x+y)\,ds,$$

où C est le contour du triangle ABO de sommet A (1, 0), B (0, 1) et O (0, 0) (fig. 101).

Solution. Ici, l'équation de AB est $y = 1 - x$, celle de OB $x = 0$ et celle de OA $y = 0$.
On a donc

$$\int_C (x+y)\,ds = \int_{AB} (x+y)\,ds + \int_{BO} (x+y)\,ds + \int_{OA} (x+y)\,ds =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int_0^1 y\,dy + \int_0^1 x\,dx = \sqrt{2}+1.$$

2°. Intégrale curviligne de seconde espèce. Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions continues et si $y = \varphi(x)$ est une courbe C à tangente variant continûment et que l'on parcourt quand x varie de a à b, alors l'*intégrale curviligne de seconde espèce* correspondante s'exprime de la manière suivante

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x) + \varphi'(x)\,Q(x, \varphi(x))]\,dx.$$

Plus généralement, quand la courbe C est donnée sous forme paramétrique $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, où t varie de α à β, on a

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt.$$

Des formules analogues sont vraies pour l'intégrale curviligne de seconde espèce prise sur une courbe gauche.

L'intégrale curviligne de seconde espèce change de signe quand on change le sens de parcours du chemin d'intégration. Cette intégrale peut être interprétée mécaniquement comme le travail correspondant à la force variable $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ le long de la courbe d'intégration C.

Exemple 2. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy,$$

où C est la demi-ellipse supérieure $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre.

Solution. On a

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_\pi^0 [b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= -ab^2\int_\pi^0 \sin^3 t\,dt + a^2b\int_\pi^0 \cos^3 t\,dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

3°. Cas d'une différentielle totale. Si la fonction à intégrer dans une intégrale curviligne de seconde espèce est la différentielle totale d'une certaine fonction univoque $U = U(x, y)$, c'est-à-dire $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y)$, cette intégrale curviligne ne dépend pas du chemin d'intégration et on a la formule de Newton-Leibniz

$$\int_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \qquad (1)$$

où (x_1, y_1) est l'origine et (x_2, y_2) l'extrémité du chemin d'intégration. En particulier, si le contour d'intégration C est fermé, alors

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (2)$$

Si 1) le contour d'intégration C est complètement intérieur à un domaine simplement connexe S et 2) les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ainsi que leurs dérivées du premier ordre sont continues dans le domaine S, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction U est que la condition

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (3)$$

soit satisfaite identiquement dans le domaine S (voir intégration des différentielles totales). Si les conditions 1) et 2) ne sont pas satisfaites, la condition (3) ne garantit pas l'existence d'une fonction univoque U et les formules (1) et (2) peuvent ne pas être vraies (voir exercice n° 2332).

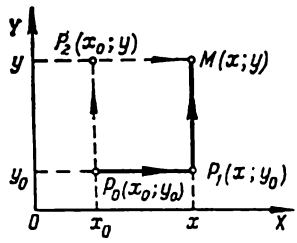


Fig. 102

Indiquons un procédé pour déterminer la fonction $U(x, y)$ d'après sa différentielle totale, basée sur l'emploi des intégrales curvilignes (c'est-à-dire donnons encore un procédé d'intégration des différentielles totales). Pour contour d'intégration C, prenons la ligne brisée P_0P_1M (fig. 102), où $P_0(x_0, y_0)$ est un point fixe, $M(x, y)$ un point variable. Alors, le long de P_0P_1, on a $y = y_0$ et $dy = 0$, et le long de P_1M $dx = 0$. On trouve

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{(x_0;\, y_0)}^{(x;\, y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

En intégrant de même le long de P_0P_2M, on a

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx.$$

Exemple 3. $(4x + 2y)\,dx + (2x - 6y)\,dy = dU$. Déterminer U.

Solution. Soit $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Alors

$$U(x, y) = \int_0^x 4x\,dx + \int_0^y (2x - 6y)\,dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

ou

$$U(x, y) = \int_0^y -6y\,dy + \int_0^x (4x+2y)\,dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

où $C = U(0, 0)$ est une constante arbitraire.

4°. Formule de Green pour le plan. Si C est la frontière du domaine S et les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans le domaine fermé $S + C$, on a la *formule de Green*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

où le parcours sur le contour C est choisi de manière que le domaine S se trouve constamment à gauche.

5°. Applications des intégrales curvilignes. 1) L'*aire* limitée par le contour fermé C est

$$S = -\oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy$$

(le sens du parcours sur le contour est choisi dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

La formule

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_C x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

est plus commode pour les applications.

2) Le *travail d'une force* dont les projections sont $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ (ou le travail d'un champ de forces) le long d'un chemin C est donné par l'intégrale

$$A = \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Si la force dérive d'un potentiel, c'est-à-dire s'il existe une fonction $U = U(x, y, z)$ (potentiel ou fonction de force) telle que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

le travail, indépendamment de la forme du chemin C, est

$$A = \int_{(x_1;\, y_1;\, z_1)}^{(x_2;\, y_2;\, z_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{(x_1;\, y_1;\, z_1)}^{(x_2;\, y_2;\, z_2)} dU =$$
$$= U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

où (x_1, y_1, z_1) est l'origine et (x_2, y_2, z_2) l'extrémité du chemin d'intégration.

A. *Intégrales curvilignes de première espèce*

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

2293. $\int\limits_C xy\,ds$ où C est le contour du carré $|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

2294. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, où C est le segment de droite réunissant les points $O\,(0, 0)$ et $A\,(1, 2)$.

2295. $\int\limits_C xy\,ds$, où C est le quart de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ situé dans le premier quart de plan.

2296. $\int\limits_C y^2\,ds$, où C est le premier arc de cycloïde $x=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$.

2297. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, où C est l'arc de développante de cercle $x=a\,(\cos t+t\sin t)$, $y=a\,(\sin t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$.

2298. $\int\limits_C (x^2+y^2)^2\,ds$, où C est l'arc de spirale logarithmique $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ compris entre les points $A\,(0, a)$ et $Q\,(-\infty, 0)$.

2299. $\int\limits_C (x+y)\,ds$, où C est la boucle de la lemniscate $r^2=a^2\cos 2\varphi$ qui se trouve à droite.

2300. $\int\limits_C (x+y)\,ds$, où C est l'arc de courbe $x=t$, $y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$ $[0\leqslant t\leqslant 1]$.

2301. $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, où C est la première spire de l'hélice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

2302. $\int\limits_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, où C est la circonférence $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

2303*. Calculer l'aire de la surface latérale du cylindre parabolique $y=\frac{3}{8}x^2$ limité par les plans $z=0$, $x=0$, $z=x$, $y=6$.

2304. Calculer la longueur de l'hélice conique C d'équations $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ réunissant le point O (0, 0, 0) au point A (a, 0, a).

2305. Déterminer la masse répartie sur le contour de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si la densité linéaire en chaque point M (x, y) est $|y|$.

2306. Déterminer la masse répartie sur la première spire de l'hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, si la densité en chaque point est égale au rayon vecteur de ce point.

2307. Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un demi-arc de cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad [0 \leqslant t \leqslant \pi].$$

2308. Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe OZ de la première spire de l'hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

2309. Déterminer avec quelle force la masse M répartie avec une densité constante sur la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, agit sur la masse m concentrée au point A (0, 0, b).

B. *Intégrales curvilignes de seconde espèce*

Calculer les intégrales curvilignes suivantes:

2310. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$, où AB est l'arc de parabole $y = x^2$ reliant les points A (1, 1) et B (2, 4).

2311. $\int\limits_{C} (2a - y)\,dx + x\,dy$, où C est le premier arc de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ parcouru dans le sens de croissance du paramètre t.

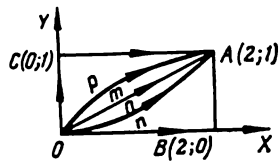


Fig. 103

2312. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2\,dy$ prise le long des différents chemins issus de l'origine des coordonnées O (0, 0) et se terminant au point A (2, 1) (fig. 103):

a) suivant la droite OmA;

b) suivant la parabole OnA dont l'axe de symétrie est l'axe OY;

c) suivant la parabole OpA dont l'axe de symétrie est l'axe OX;

d) suivant la ligne brisée OBA ;
e) suivant la ligne brisée OCA.

2313. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy$ pour les mêmes hypothèses que l'exercice 2312.

2314*. $\oint \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ prise sur la circonférence $x^2+y^2=a^2$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2315. $\int\limits_C y^2\,dx + x^2\,dy$, où C est la demi-ellipse supérieure $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre.

2316. $\int\limits_{AB} \cos y\,dx - \sin x\,dy$ prise sur le segment AB de la bissectrice du deuxième angle des coordonnées si l'abscisse du point A est 2 et l'ordonnée du point B est 2.

2317. $\oint\limits_C \frac{xy\,(y\,dx-x\,dy)}{x^2+y^2}$, où C est la boucle droite de la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2318. Calculer les intégrales curvilignes des expressions qui sont des différentielles totales :

a) $\int\limits_{(-1\,;\,2)}^{(2\,;\,3)} x\,dy + y\,dx$,

b) $\int\limits_{(0\,;\,1)}^{(3\,;\,4)} x\,dx + y\,dy$,

c) $\int\limits_{(0\,;\,0)}^{(1\,;\,1)} (x+y)\,(dx+dy)$,

d) $\int\limits_{(1\,;\,2)}^{(2\,;\,1)} \frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$ (suivant un chemin qui ne coupe pas l'axe OX),

e) $\int\limits_{\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)}^{(x\,;\,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$ (suivant un chemin qui ne coupe pas la droite $x+y=0$),

f) $\int\limits_{(x_1\,;\,y_1)}^{(x_2\,;\,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy.$

2319. Trouver les primitives des fonctions à intégrer et calculer les intégrales :

a) $\int\limits_{(-2\,;\,-1)}^{(3\,;\,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy,$

b) $\int\limits_{(0\,;\,-1)}^{(1\,;\,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ (le chemin d'intégration ne coupe pas la droite $y = x$),

c) $\int\limits_{(1\,;\,1)}^{(3\,;\,1)} \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$ (le chemin d'intégration ne coupe pas la droite $y = -x$),

d) $\int\limits_{(0\,;\,0)}^{(1\,;\,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) dy.$

2320. Calculer

$$I = \int \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

prise dans le sens des aiguilles d'une montre sur le quart d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situé dans le premier quart de plan.

2321. Montrer que si la fonction $f(u)$ est continue et que si C est un contour fermé à tangente variant continûment, morceau par morceau, alors

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0.$$

2322. Trouver la fonction primitive U, si :

a) $du = (2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy$;

b) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\,dy$;

c) $du = e^{x-y}\,[(1 + x + y)\,dx + (1 - x - y)\,dy]$;

d) $du = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}$.

Calculer les intégrales curvilignes prises sur des courbes gauches :

2323. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, où C est une spire de l'hélice

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

correspondant aux variations du paramètre t de 0 à 2π.

2324. $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, où C est la circonférence

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\cos t, \\ y = R\cos\alpha\sin t, \\ z = R\sin\alpha \quad (\alpha = \text{const}), \end{cases}$$

parcourue dans le sens de croissance du paramètre.

2325. $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, où OA est l'arc de circonférence

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad z = x$$

ayant des $y > 0$ par rapport au plan XOZ.

2326. Calculer les intégrales curvilignes des différentielles totales:

a) $\int\limits_{(1\,;\,0\,;\,-3)}^{(6\,;\,4\,;\,8)} x\,dx + y\,dy - z\,dz$,

b) $\int\limits_{(1\,;\,1\,;\,1)}^{(a\,;\,b\,;\,c)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$,

c) $\int\limits_{(0\,;\,0\,;\,0)}^{(3\,;\,4\,;\,5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

d) $\int\limits_{(1\,;\,1\,;\,1)}^{\left(x\,;\,y\,;\,\frac{1}{xy}\right)} \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$ (le chemin d'intégration se trouve dans le dièdre $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

C. *Formule de Green*

2327. Transformer l'intégrale curviligne

$$I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy,$$

à l'aide de la formule de Green, où le contour C limite le domaine S.

2328. En appliquant la formule de Green, calculer

$$I = \oint_C 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy,$$

où C est le périmètre du triangle, parcouru dans le sens positif, dont les sommets coïncident avec les points A (1, 1), B (2, 2) et C (1, 3). Vérifier le résultat obtenu en calculant directement l'intégrale.

2329. En appliquant la formule de Green, calculer l'intégrale

$$\oint_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

où C est la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$ parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2330. Par les points A (1, 0) et B (2, 3), on fait passer la parabole AmB d'axe OY et de corde AnB. Calculer $\oint_{AmBnA} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$ directement et en appliquant la formule de Green.

2331. Calculer $\int_{AmB} e^{xy}[y^2\,dx + (1+xy)\,dy]$, si les points A et B se trouvent sur l'axe OX et l'aire de la figure limitée par le chemin d'intégration AmB et le segment AB est égale à S.

2332*. Calculer $\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Considérer deux cas :

a) quand l'origine des coordonnées ne se trouve pas sur le contour C,

b) quand le contour contient n fois l'origine des coordonnées.

2333.** Montrer que si C est une courbe fermée, on a

$$\oint_C \cos(X, n)\, ds = 0,$$

où s est la longueur de l'arc et n la normale extérieure.

2334. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \oint_C [x \cos(X, n) + y \sin(X, n)]\, ds$$

en appliquant la formule de Green, où ds est la différentielle de l'arc et n la normale extérieure au contour C.

2335*. Calculer l'intégrale

$$\oint_C \frac{dx - dy}{x + y}$$

prise sur le périmètre du carré de sommets aux points A (1, 0), B (0, 1), C(—1, 0) et D (0, —1) et parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

D. *Applications de l'intégrale curviligne*

Calculer l'aire des figures limitées par les courbes suivantes :

2336. Par l'ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

2337. Par l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

2338. Par la cardioïde $x = a\,(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a\,(2 \sin t - \sin 2t)$.

2339*. Par une boucle du folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

2340. Par la courbe $(x + y)^3 = axy$.

2341*. Une circonférence de rayon r roule sans glisser sur une circonférence fixe de rayon R en lui restant extérieur. En supposant que $\frac{R}{r}$ est un nombre entier, trouver l'aire limitée par la courbe (épicycloïde) décrite par un point quelconque de la circonférence mobile. Etudier le cas particulier $r = R$ (cardioïde).

2342*. Une circonférence de rayon r roule sans glisser sur une circonférence fixe de rayon R en lui restant inté-

rieur. En supposant que $\frac{R}{r}$ est un nombre entier, déterminer l'aire de la figure, limitée par la courbe (hypocycloïde), décrite par un point quelconque de la circonférence mobile. Etudier le cas particulier $r = \frac{R}{4}$ (astroïde).

2343. Un champ est engendré par une force de grandeur constante F et de direction coïncidant avec le sens positif du demi-axe OX. Déterminer le travail de ce champ quand un point matériel décrit dans le sens des aiguilles d'une montre le quart de la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$ situé dans le premier quart de plan.

2344. Déterminer le travail engendré par la force de pesanteur lorsqu'un point matériel de masse m est passé de la position A (x_1, y_1, z_1) à la position B (x_2, y_2, z_2) (l'axe OZ est dirigé vers le haut).

2345. Déterminer le travail d'une force élastique dirigée vers l'origine des coordonnées et proportionnelle à la distance du point d'application à l'origine des coordonnées, si le point d'application de cette force décrit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre le quart de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se trouvant dans le premier quart de plan.

2346. Déterminer la fonction potentielle de la force $R\{X, Y, Z\}$ et définir le travail de cette force sur les portions données du chemin si :

a) $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$ (force de pesanteur) et le point matériel passe de la position A (x_1, y_1, z_1) à la position B (x_2, y_2, z_2) ;

b) $X = -\frac{\mu x}{r^3}$, $Y = -\frac{\mu y}{r^3}$, $Z = -\frac{\mu z}{r^3}$, où $\mu = \text{const}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (attraction newtonienne) et le point matériel s'éloigne du point A (a, b, c) à l'infini ;

c) $X = -k^2 x$, $Y = -k^2 y$, $Z = -k^2 z$, où $k = \text{const}$ (force élastique), l'origine du chemin se trouve sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et l'extrémité sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(R > r)$.

§ 10. Intégrales de surface

1°. Intégrale de surface de première espèce. Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue et $z = \varphi(x, y)$ une surface S à plan tangent variant continûment.

Par définition, on appelle *intégrale de surface de première espèce* la limite des sommes intégrales

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i,$$

où ΔS_i est l'aire du i-ème élément de la surface S, et le point (x_i, y_i, z_i) appartenant à cet élément; en outre, le diamètre maximum des éléments de décomposition de cette surface tend vers 0.

La valeur de cette intégrale est indépendante du choix de la face de la surface S sur laquelle l'intégration s'effectue.

Si la projection σ sur le plan XOY de la surface S est univoque, c'est-à-dire que chaque droite parallèle à l'axe OZ coupe la surface S seulement en un point, alors l'intégrale de surface de première espèce correspondante peut être calculée d'après la formule

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1+\varphi'^2_x(x, y)+\varphi'^2_y(x, y)}\, dx\, dy.$$

Exemple 1. Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_S (x+y+z)\, dS,$$

où S est la surface du cube $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Calculons la somme des intégrales étendues à la face supérieure du cube ($z = 1$) et à la face inférieure ($z = 0$)

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y+1)\, dx\, dy + \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2x+2y+1)\, dx\, dy = 3.$$

Il est évident que l'intégrale de surface à calculer doit être multipliée par trois et qu'elle est égale à

$$\iint_S (x+y+z)\, dS = 9.$$

2°. Intégrale de surface de seconde espèce. Si $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ sont des fonctions continues et si S^+ est la face de la surface S, à plan tangent variant continûment, définie par la normale $\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, alors l'*intégrale de surface de seconde espèce* correspondante s'écrit de la manière suivante:

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Quand on passe à l'autre face S^- de la surface, cette intégrale change de signe.

Si la surface S est donnée sous forme implicite $F(x, y, z) = 0$, les cosinus directeurs de la normale sont définis par les formules

$$\cos\alpha = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

où

$$D = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

et le choix du signe devant le radical doit concorder avec la face de la surface S.

3°. Formule de Stokes. Si les fonctions $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ sont continûment différentiables et si C est un contour fermé limitant une portion de surface S à deux faces, on a la *formule de Stokes*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S, en outre, le sens de la normale se définit de manière que la normale parcourt le contour C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (dans un système des coordonnées dextrorsum).

Calculer les intégrales de surface de première espèce suivantes :

2347. $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, où S est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2348. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, où S est la surface latérale du cône $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $[0 \leqslant z \leqslant b]$.

Calculer les intégrales de surface de seconde espèce suivantes :

2349. $\iint_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, où S est la face extérieure du tétraèdre limité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

2350. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$, où S est la face extérieure de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2351. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, où S est la face extérieure de la demi-sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

2352. Déterminer la masse de la surface du cube $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, si la densité superficielle au point $M(x, y, z)$ est xyz.

2353. Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'une membrane parabolique homogène $az=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant a)$.

2354. Déterminer le moment d'inertie de la portion de la surface latérale du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $[0\leqslant z\leqslant h]$ par rapport à l'axe OZ.

2355. Transformer les intégrales en appliquant la formule de Stokes:

a) $\oint\limits_C (x^2-yz)\,dx+(y^2-zx)\,dy+(z^2-xy)\,dz$;

b) $\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$.

Calculer les intégrales données en appliquant la formule de Stokes et vérifier les résultats en les calculant directement:

2356. $\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, où C est la circonférence

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x+y+z=0.$$

2357. $\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, où C est l'ellipse

$$x^2+y^2=1,\quad x+z=1.$$

2358. $\oint\limits_C x\,dx+(x+y)\,dy+(x+y+z)\,dz$, où C est la courbe

$$x=a\sin t,\ y=a\cos t,\ z=a(\sin t+\cos t)\quad [0\leqslant t\leqslant 2\pi].$$

2359. $\oint\limits_{ABCA} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, où $ABCA$ est le périmètre du triangle ABC de sommets $A\,(a, 0, 0)$, $B\,(0, a, 0)$, $C\,(0, 0, a)$.

2360. Dans quel cas l'intégrale curviligne

$$I = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

prise sur un contour fermé arbitraire C est égale à zéro?

§ 11. Formule d'Ostrogradski-Gauss

Si S est une surface fermée à plan tangent variant continûment limitant un volume V et si $P = P\,(x, y, z)$, $Q = Q\,(x, y, z)$, $R = R\,(x, y, z)$ sont des fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans le domaine fermé V, alors on a la *formule d'Ostrogradski-Gauss*:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S.

En appliquant la formule d'Ostrogradski-Gauss, transformer les intégrales de surfaces suivantes étendues aux surfaces fermées S limitant des volumes V ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S).

2361. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx.$

2362. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy.$

2363. $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

2364. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS.$

Calculer les intégrales de surfaces suivantes à l'aide de la formule d'Ostrogradski-Gauss :

2365. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, où S est la face extérieure du cube $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

2366. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, où S est la face extérieure de la pyramide limitée par les plans $x+y+z = a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2367. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, où S est la face extérieure de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2368. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, où S est la face extérieure de la surface totale conique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \quad [0 \leqslant z \leqslant b].$$

2369. Démontrer que si S est une surface fermée et $\vec{l}$ une direction constante quelconque, alors

$$\iint\limits_S \cos(\vec{n}, \vec{l})\,dS = 0,$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface S.

2370. Démontrer que le volume d'un corps V limité par une surface S est

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S.

§ 12. Eléments de la théorie du champ

1°. Champs scalaires et champs vectoriels. Un *champ scalaire* est défini par une fonction scalaire du point $u = f(P) = f(x, y, z)$, où $P(x, y, z)$ est un point de l'espace. La surface $f(x, y, z) = C$, où $C = \text{const}$, est appelée *surface de niveau* du champ scalaire.

Un *champ vectoriel* est défini par une fonction vectorielle de point: $\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(\vec{r})$, où P est un point de l'espace et $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ le rayon vecteur du point P. En fonction des composantes, on a $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, où $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ sont les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes des coordonnées. Les *lignes vectorielles* (*lignes de force*, *lignes de courant*) d'un champ vectoriel sont déterminés par le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Les champs scalaires et vectoriels indépendants du temps t s'appellent *stationnaires*, ceux qui dépendent du temps sont dits *non-stationnaires*.

2°. Gradient. Le vecteur

$$\operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \equiv \nabla U,$$

où $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ est l'opérateur de Hamilton (nabla) et est appelé *gradient* du champ $U = f(P)$ au point considéré P (comparer avec chap. VI, § 6). Le gradient est dirigé suivant la normale $\vec{n}$ à la surface de niveau au point P dans le sens de croissance de la fonction U et a pour longueur

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Si la direction est donnée par le vecteur unitaire $\vec{l}$ $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, alors

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \operatorname{grad} U \cdot \vec{l} = \operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(dérivée de la fonction U dans la direction l).

3°. Divergence et rotationnel. La *divergence* d'un champ vectoriel $\vec{a}(P) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ est le scalaire

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \nabla\vec{a}.$$

Le *rotationnel* du champ vectoriel $\vec{a}(P) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ est le vecteur

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} \equiv \nabla\vec{a}.$$

4°. Flux d'un vecteur. Le *flux* du champ vectoriel $\vec{a}(P)$ à travers une surface S dans la direction définie par le vecteur unitaire de la normale $\vec{n}$ $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ à la surface S est, par

définition, l'intégrale

$$\iint_S an\, dS = \iint_S a_n\, dS = \iint_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS.$$

Si S est une surface fermée limitant un domaine V et $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface S, on a la formule d'*Ostrogradski-Gauss* qui, sous forme vectorielle, s'écrit

$$\oiint_S a_n\, dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz.$$

5°. Circulation d'un vecteur, travail d'un champ. L'*intégrale* curviligne d'un vecteur $\vec{a}$ prise sur une courbe C est donnée par la formule

$$\int_C a\, d\vec{r} = \int_C a_s\, ds = \int_C a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz \qquad (1)$$

et représente le *travail* du champ $\vec{a}$ le long de la courbe C (a_s est la projection du vecteur $\vec{a}$ sur la tangente à C).

Si la courbe C est fermée, l'intégrale (1) s'appelle la *circulation* du champ vectoriel $\vec{a}$ le long du contour C.

Si la courbe fermée C limite une surface à deux faces S, on a la *formule de Stokes* qui, sous forme vectorielle, s'écrit

$$\oint_C \vec{a}\, d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{a}\, dS,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur de la normale à la surface S, dont le sens est choisi de manière qu'un observateur regardant dans la direction $\vec{n}$ voit parcourir le contour C par rapport à un système de coordonnées dextrorsum dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

6°. Champ potentiel et champ solénoïdal. Le champ vectoriel $\vec{a}(\vec{r})$ est dit *potentiel* si

$$\vec{a} = \operatorname{grad} U,$$

où $U = f(\vec{r})$ est une fonction scalaire (le *potentiel* du champ).

Pour qu'un champ $\vec{a}$ donné dans un domaine simplement connexe dérive d'un potentiel il est nécessaire et suffisant qu'il soit *irrotationnel*, c'est-à-dire que rot $\vec{a} = 0$. Dans ce cas, il existe un potentiel U, défini par l'équation

$$dU = a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz.$$

Si le potentiel U est une fonction univoque, alors $\int_{AB} \vec{a}\, d\vec{r} = U(B) - U(A)$; en particulier, la circulation du vecteur $\vec{a}$ est nulle: $\oint_C \vec{a}\, d\vec{r} = 0$.

Le champ vectoriel $\vec{a}(\vec{r})$ est dit *solénoïdal* si en chaque point du champ div $\vec{a} = 0$; dans ce cas le flux du vecteur à travers toute surface fermée est nul.

Si le champ est simultanément potentiel et solénoïdal, alors div (grad U) $= 0$ et le potentiel U est une fonction harmonique, c'est-à-dire qu'il satisfait à l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ ou $\Delta U = 0$, où $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace.

2371. Déterminer les surfaces de niveau du champ scalaire $U = f(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Quelles sont les surfaces de niveau du champ $U = F(\rho)$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$?

2372. Déterminer les surfaces de niveau du champ scalaire

$$U = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2373. Montrer que les lignes vectorielles du champ vectoriel $\vec{a}(P) = \vec{c}$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant, sont des droites parallèles au vecteur $\vec{c}$.

2374. Déterminer les lignes vectorielles du champ $\vec{a} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, où ω est une constante.

2375. Etablir les formules:

a) grad $(C_1 U + C_2 V) = C_1$ grad $U + C_2$ grad V, où C_1 et C_2 sont des constantes;

b) grad $(UV) = U$ grad $V + V$ grad U;

c) grad $(U^2) = 2U$ grad U;

d) grad $\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \text{ grad } U - U \text{ grad } V}{V^2}$;

e) grad $\varphi(U) = \varphi'(U)$ grad U.

2376. Déterminer la grandeur et la direction du gradient du champ $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ au point $A(2, 1, 1)$. Déterminer les points en lesquels le gradient du champ est perpendiculaire à l'axe OZ et les points en lesquels il est nul.

2377. Calculer grad U, si U est respectivement: a) r, b) r^2, c) $\frac{1}{r}$, d) $f(r)$ $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

2378. Déterminer le gradient du champ scalaire $U = \vec{c}\vec{r}$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant. Déterminer les surfaces de niveau de ce champ et les situer par rapport au vecteur $\vec{c}$.

2379. Déterminer la dérivée de la fonction $U=\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ au point donné $P(x, y, z)$ et la direction du rayon vecteur $\vec{r}$ de ce point. Dans quel cas cette dérivée est égale à la grandeur du gradient?

2380. Calculer la dérivée de la fonction $U=\frac{1}{r}$ dans la direction $\vec{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Dans quel cas cette dérivée est nulle?

2381. Etablir les formules:

a) $\operatorname{div}(C_1\vec{a}_1+C_2\vec{a}_2)=C_1\operatorname{div}\vec{a}_1+C_2\operatorname{div}\vec{a}_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes;

b) $\operatorname{div}(U\vec{c})=\operatorname{grad}U\cdot\vec{c}$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant;

c) $\operatorname{div}(U\vec{a})=\operatorname{grad}U\cdot\vec{a}+U\cdot\operatorname{div}\vec{a}$.

2382. Calculer $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$.

2383. Calculer $\operatorname{div}\vec{a}$ pour le champ vectoriel central $\vec{a}(P)=f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ où $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2384. Etablir les formules:

a) $\operatorname{rot}(C_1\vec{a}_1+C_2\vec{a}_2)=C_1\operatorname{rot}\vec{a}_1+C_2\operatorname{rot}\vec{a}_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes;

b) $\operatorname{rot}(U\vec{c})=\operatorname{grad}U\times\vec{c}$; où $\vec{c}$ est un vecteur constant;

c) $\operatorname{rot}(U\vec{a})=\operatorname{grad}U\times\vec{a}+U\operatorname{rot}\vec{a}$.

2385. Calculer la divergence et le rotationnel du vecteur $\vec{a}$, si $\vec{a}$ est respectivement: a) $\vec{r}$, b) $\vec{r}\vec{c}$ et c) $f(r)\vec{c}$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant.

2386. Calculer la divergence et le rotationnel du champ des vitesses linéaires des points d'un corps en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe OZ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2387. Calculer le rotationnel du champ des vitesses linéaires $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ des points d'un corps en rotation avec une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe passant par l'origine des coordonnées.

2388. Calculer la divergence et le rotationnel du gradient d'un champ scalaire U.

2389. Démontrer que div (rot $\vec{a}$) = 0.

2390. En utilisant le théorème d'Ostrogradski-Gauss démontrer que le flux du vecteur $\vec{a} = \vec{r}$ à travers une surface fermée limitant un volume arbitraire v est égal au triple de ce volume.

2391. Calculer le flux du vecteur $\vec{r}$ à travers la surface totale du cylindre $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

2392. Calculer le flux du vecteur $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ à travers :

a) la surface latérale du cône $\frac{x^2+y^2}{R^2} \leqslant \frac{z^2}{H^2}$, $0 \leqslant z \leqslant H$;

b) la surface totale du cône.

2393*. Calculer la divergence et le flux de la force d'attraction $\vec{F} = -\frac{m\vec{r}}{r^3}$ d'un point de masse m concentrée à l'origine des coordonnées à travers une surface fermée arbitraire contenant ce point.

2394. Calculer l'intégrale linéaire du vecteur $\vec{r}$ prise suivant une spire de l'hélice $x = R \cos t$; $y = R \sin t$; $z = ht$ de $t = 0$ à $t = 2\pi$.

2395. Calculer à l'aide du théorème de Stokes la circulation du vecteur $\vec{a} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ le long de la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ en prenant pour surface la demi-sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

2396. Montrer que si la force $\vec{F}$ est centrale, c'est-à-dire dirigée vers un point fixe 0 et dépend seulement de la distance r à ce point $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, où $f(r)$ est une fonction univoque continue, alors le champ dérive d'un potentiel. Déterminer le potentiel U du champ.

2397. Déterminer le potentiel U du champ gravitationnel engendré par un point matériel de masse m concentrée à l'origine des coordonnées : $\vec{a} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$. Montrer que le potentiel U satisfait à l'équation de Laplace $\Delta U = 0$.

2398. Dire si un champ vectoriel donné possède un potentiel U et le déterminer, si le potentiel existe :

a) $\vec{a} = (5x^2y - 4xy)\,\vec{i} + (3x^2 - 2y)\,\vec{j}$;

b) $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$;

c) $\vec{a} = (y + z)\,\vec{i} + (x + z)\,\vec{j} + (x + y)\,\vec{k}$.

2399. Démontrer que le champ central spatial $\vec{a} = f(r)\,\vec{r}$ est solénoïdal si $f(r) = \frac{k}{r^3}$, où $k = \text{const}$.

2400. Le champ vectoriel $\vec{a} = r\,(\vec{c} \times \vec{r})$, où $\vec{c}$ est un vecteur constant, est-il solénoïdal ?

CHAPITRE VIII

SÉRIES

§ 1. Séries numériques

1°. Notions fondamentales. La série numérique

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est dite *convergente* si sa *somme partielle*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

a une limite finie lorsque $n \to \infty$. Le nombre $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ est, par définition, la *somme* de la série et le nombre

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

le *reste* de la série. Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas (ou est infinie), on dit que la série est *divergente*.

Si la série converge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (*critère nécessaire de convergence*). La proposition inverse n'est pas vraie.

Pour que la série (1) converge, il est nécessaire et suffisant que, pour chaque nombre positif ε on puisse trouver un nombre N tel que pour $n > N$ et pour p positif arbitraire l'inégalité

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

soit satisfaite (*critère de Cauchy*).

On ne change pas la convergence ou la divergence d'une série, si on ajoute ou on retranche un nombre fini de ces termes.

2°. Critères de convergence et de divergence des séries à termes positifs.

a) Critère de comparaison I. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ à partir de $n = n_0$ et si la série

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

converge, la série (1) converge aussi. Si la série (1) diverge, la série (2) diverge aussi.

En qualité de séries de comparaison, il est commode, en particulier, de considérer la progression géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0)$$

qui converge pour $|q| < 1$ et diverge pour $|q| \geqslant 1$ et la *série harmonique*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

qui est une série divergente.

Exemple 1. La série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdots$$

converge, puisque dans ce cas

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n},$$

et que la progression géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

de raison $q = \frac{1}{2}$ converge.

Exemple 2. La série

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n} + \cdots$$

diverge puisque son terme général $\frac{\ln n}{n}$ est plus grand que le terme correspondant $\frac{1}{n}$ de la série harmonique (qui diverge).

b) Critère de comparaison II. S'il existe une limite finie et différente de zéro $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ (en particulier si $a_n \sim b_n$), les séries (1) et (2) convergent ou divergent simultanément.

Exemple 3. La série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

diverge, puisque

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

et que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 4. La série

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\cdots+\frac{1}{2^n-n}+\cdots$$

converge puisque

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}:\frac{1}{2^n}\right)=1,\ \text{c'est-à-dire}\ \frac{1}{2^n-n}\sim\frac{1}{2^n}\ \text{et que}$$

la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge.

c) Critère de D'Alembert. Soit $a_n>0$ (à partir d'un certain n) et la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

existant. La série (1) converge si $q<1$ et diverge si $q>1$.

Si $q=1$, on ne peut rien dire.

Exemple 5. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$$

Solution. Dans ce cas

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n},\quad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\,2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la série considérée converge.

d) Critère de Cauchy. Soit $a_n\geqslant 0$ (à partir d'un certain n) et la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$$

existe. Alors la série (1) converge si $q<1$ et diverge si $q>1$. Pour $q=1$, on ne peut rien dire.

e) Comparaison avec une intégrale (Cauchy). Si $a_n=f(n)$, où la fonction $f(x)$ est positive, monotone décroissante et continue pour $x\geqslant a\geqslant 1$, alors la série (1) et l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

convergent ou divergent simultanément.

A l'aide de ce critère, on démontre que la *série de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3}$$

converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leqslant 1$. La convergence de nombreuses séries peut être établie en les comparant à la série de Dirichlet.

Exemple 6. Etudier la convergence de la série

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\,2n}+\cdots$$

Solution. On a

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)\,2n}=\frac{1}{4n^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{2n}}\sim\frac{1}{4n^2}.$$

Puisque la série de Dirichlet pour $p = 2$ converge, d'après le critère de comparaison II, on peut affirmer que la série considérée converge.

3°. Critères de convergence des séries à termes alternés.

Si la série

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{4}$$

formée des valeurs absolues des termes de la série (1) converge, la série (1) converge et on dit qu'elle est *absolument convergente*. De même, si la série (1) converge et la série (4) diverge, la série (1) est dite *semi-convergente* (ou *non absolument convergente*).

Pour étudier la convergence absolue de la série (1), on peut appliquer à la série (4) les différents critères connus de convergence des séries à termes positifs. En particulier, la série (1) converge absolument si

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1.$$

Dans le cas général, la divergence de la série (4) n'entraîne pas nécessairement la divergence de la série (1). Mais si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, non seulement la série (4) diverge, mais aussi la série (1).

Critère de Leibniz. Si pour la série à termes alternés

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots\ (b_n\geqslant 0) \tag{5}$$

les conditions 1) $b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ sont satisfaites, alors la série (5) converge.

Pour le reste R_n de la série, on a dans ce cas l'évaluation suivante:

$$|R_n|\leqslant b_{n+1}.$$

Exemple 7. Etudier la convergence de la série

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\cdots$$

Solution. Formons la série des valeurs absolues des termes de la série considérée:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\cdots$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2},$$

la série considérée converge absolument.

Exemple 8. La série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

converge puisque les conditions du critère de Leibniz sont vérifiées. Cette série est semi-convergente, puisque la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

diverge (série harmonique).

Remarque. Pour la convergence d'une série à termes alternés il n'est pas suffisant que son terme général tende vers zéro. Le critère de Leibniz affirme qu'une série à termes alternés converge si la valeur absolue du terme général de cette série tend vers zéro d'une manière monotone. Ainsi, par exemple, la série

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+\ldots$$

diverge, bien que son terme général tende vers zéro (la valeur absolue du terme général tend vers zéro d'une manière non monotone). En effet, on a $S_{2k}=S'_k+S''_k$, où

$$S'_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k},\quad S''_k=-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^k}\right),$$

avec $\lim\limits_{k\to\infty}S'_k=\infty$ (S'_k est la somme partielle de la série harmonique) alors que la limite $\lim\limits_{k\to\infty}S''_k$ existe et est finie (S''_k est la somme partielle d'une progression géométrique convergente), par conséquent, $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=\infty$.

D'autre part, pour la convergence d'une série à termes alternés, le critère de Leibniz n'est pas nécessaire: une série à termes alternés peut converger si la valeur absolue de son terme général tend vers zéro d'une manière non monotone.

Ainsi, la série

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$$

converge, et même absolument, bien que le critère de Leibniz ne soit pas vérifié: la valeur absolue du terme général de la série tend vers zéro d'une manière non monotone.

4°. Séries à termes complexes. La série de terme général $c_n = a_n + ib_n$ ($i^2 = -1$) converge si et seulement si convergent simultanément les séries à termes réels $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; on a alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{6}$$

La série (6) converge a priori et elle est appelée *absolument convergente* si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

dont les termes sont les modules des termes de la série (6), converge.

5°. Opérations sur les séries.

a) Une série convergente peut être multipliée terme à terme par un nombre quelconque k, c'est-à-dire si

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S,$$

alors

$$ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n + \ldots = kS.$$

b) Par *somme* (resp. *différence*) de deux séries convergentes

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S_1, \tag{7}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = S_2 \tag{8}$$

on a en vue la série

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots = S_1 \pm S_2.$$

c) Par *produit* des deux séries (7) et (8) on a en vue la série

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \tag{9}$$

où

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si les séries (7) et (8) convergent absolument, la série (9) converge aussi absolument et a pour somme S_1S_2.

d) Si une série converge absolument, sa somme ne change pas si on groupe les termes de la série. Cette propriété n'est pas vraie dans le cas d'une série non absolument convergente.

Donner l'expression du n-ième terme des séries suivantes :

2401. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

2402. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

2403. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$

2404. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$

2405. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$

2406. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$

2407. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots$

2408. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\ldots$

2409. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2410. $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\ldots$

On demande, dans les exercices n°s 2411-2415, d'écrire les 4 ou 5 premiers termes de la série de terme général donné a_n.

2411. $a_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$.

2412. $\frac{(-1)^n n}{2^n}$.

2413. $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

2414. $a_n=\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$.

2415. $a_n=\frac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

Etudier la convergence des séries en appliquant les critères de comparaison (ou un critère nécessaire) :

2416. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

2417. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$

2418. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots$

2419. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+\ldots$

2420. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

2421. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{10n+1}+\ldots$

2422. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

2423. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$

2424. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2425. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$

2426. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\ldots$

Etudier la convergence des séries à l'aide du critère de D'Alembert :

2427. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$

2428. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}+\ldots$

Etudier la convergence des séries à l'aide du critère de Cauchy :

2429. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$

2430. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$

Etudier la convergence des séries à termes positifs :

2431. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2432. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\ldots$

2433. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2434. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots$

2435. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$

2436. $\frac{3}{2^2\cdot3^3}+\frac{5}{3^2\cdot4^2}+\frac{7}{4^2\cdot5^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\ldots$

2437. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$

2438. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$

2439. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$

2440. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots$

2441. $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\ldots+\frac{n!}{2^n+1}+\ldots$

2442. $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2443. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\ldots 4n}+\ldots$

2444. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

2445. $1000+\frac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\ldots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}+\ldots$$

2446. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(8n-11)(8n-7)}+\ldots$

2447. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 5\ldots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(4n-4)(4n-2)}+\ldots$

2448. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

2449. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

2450. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2451. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

2452. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2453. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

2454. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

2455. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2456. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

2457. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

2458. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$.

2459. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2460. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2461. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$.

2462. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

2463. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$.

2464. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2465. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

2466. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

2467. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

2468*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

2469. Démontrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{1}{\ln^q n}$:

1) converge pour q quelconque, si $p > 1$, et pour $q > 1$, si $p = 1$;

2) diverge pour q quelconque, si $p < 1$, et pour $q \leqslant 1$, si $p = 1$.

Etudier la convergence des séries à termes alternés suivantes. Dans le cas de convergence, dire si les séries sont absolument ou semi-convergentes.

2470. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$

2471. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ldots$

2472. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$

2473. $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\ldots$

2474. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots$

2475. $-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\ldots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}+\ldots$

2476. $-\frac{2}{2\sqrt{2}-1}+\frac{3}{3\sqrt{3}-1}-\frac{4}{4\sqrt{4}-1}+\ldots+$
$$+(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+\ldots$$

2477. $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots$

2478. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot5}{2\cdot5}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot5\cdot8}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}+\ldots$

2479. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot4}{7\cdot9}+\frac{1\cdot4\cdot7}{7\cdot9\cdot11}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\ldots(2n+5)}+\ldots$

2480. $\frac{\sin\alpha}{\ln 10}+\frac{\sin 2\alpha}{(\ln 10)^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}+\ldots$

2481. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. 2482. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2483. S'assurer que le critère de convergence de D'Alembert ne permet pas de dire si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, où

$$a_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}},\quad a_{2k}=\frac{2^{k-1}}{3^k}\quad(k=1,2,\ldots),$$

converge, mais que le critère de Cauchy permet d'étudier la convergence de cette série.

2484*. S'assurer que le critère de Leibniz ne peut être appliqué aux séries à termes alternés a) — d). Dire quelles sont les séries divergentes, semi-convergentes et absolument convergentes:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\ldots$
$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right);$$

b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots$
$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2^{k-1}},\quad a_{2k}=-\frac{1}{3^{2k-1}}\right);$$

c) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{3^k}\right);$$

d) $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{9}+\ldots$

$$\left(a_{2k-1}=\frac{1}{4k-1},\quad a_{2k}=-\frac{1}{4k-3}\right).$$

Etudier la convergence des séries à termes complexes:

2485. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

2486. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}$.

2487. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$.

2488. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

2489. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$.

2490. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

2491. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$.

2492. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

2493. Entre les courbes $y=\frac{1}{x^3}$ et $y=\frac{1}{x^2}$ et à droite de leur point d'intersection, on construit des segments parallèles à l'axe OY et équidistants l'un de l'autre. Est-ce que la somme des longueurs de ces segments est finie?

2494. Est-ce que la somme des longueurs des segments dont il est question dans l'exercice précédent est finie si la courbe $y=\frac{1}{x^2}$ est remplacée par la courbe $y=\frac{1}{x}$?

2495. Former la somme des séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}$. Est-ce que la somme converge?

2496. Former la différence des séries divergentes $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ et étudier sa convergence.

2497. Est-ce que la série obtenue en retranchant la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est convergente?

2498. Donner un exemple de deux séries telles que leur somme soit convergente et leur différence divergente.

2499. Former le produit des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Est-ce que ce produit est convergent?

2500. Former la série $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)^2$. Est-ce que cette série converge?

2501. On donne la série $-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots$ Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série par la somme des quatre premiers termes, par la somme des cinq premiers termes. Que peut-on dire du signe de ces erreurs?

2502*. Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

par la somme de ses n premiers termes.

2503. Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

par la somme de n premiers termes. En particulier, évaluer pour $n = 10$ la précision de l'approximation.

2504.** Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

par la somme de ses n premiers termes. En particulier, évaluer la précision de l'approximation pour $n = 1000$.

2505.** Evaluer l'erreur commise en remplaçant la somme de la série

$$1+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+\cdots$$

par la somme de ses n premiers termes.

2506. Combien faut-il prendre de termes dans la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour calculer sa somme à 0,01, à 0,001 près?

2507. Combien faut-il prendre de termes dans la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)\,5^n}$ pour avoir la somme de la série à 0,01, 0,001, 0,0001 près?

2508. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

2509. Trouver la somme de la série

$$\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x}\right)+\ldots$$

§ 2. Séries de fonctions

1°. Domaine de convergence. L'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la série de fonctions

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

converge s'appelle *domaine de convergence* de cette série. La fonction

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

où $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ et x appartient au domaine de convergence, s'appelle *somme* de la série; $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ est le *reste* de la série.

Pour déterminer le domaine de convergence de la série (1), il est suffisant, dans les cas simples, d'appliquer les critères de convergence connus en supposant x fixe.

Exemple 1. Déterminer le domaine de convergence de la série

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots \qquad (2)$$

S o l u t i o n. En désignant par u_n le terme général de la série, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}2^n n}{2^{n+1}(n+1)|x|^n}=\frac{|x+1|}{2}.$$

D'après le critère de D'Alembert, on peut affirmer que la série est convergente (et même absolument) si $\frac{|x+1|}{2}<1$, c'est-à-dire pour $-3<x<1$; la série diverge si $\frac{|x+1|}{2}>1$, c'est-à-dire si $-\infty<x<-3$ ou $1<x<\infty$ (fig. 104). Pour $x=1$ on trouve la série

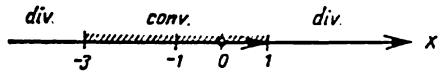


Fig. 104

harmonique $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, qui diverge, et pour $x=-3$ on retrouve la série $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$ qui (d'après le critère de Leibniz) converge (non absolument).

Ainsi, la serie converge pour $-3\leqslant x<1$.

2°. S é r i e s e n t i è r e s. Pour chaque *série entière*

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots \qquad (3)$$

(c_n et a sont des nombres réels) il existe un intervalle (*intervalle de convergence*) $|x-a|<R$ de centre au point $x=a$ à l'intérieur duquel la série (3) converge absolument, pour $|x-a|>R$ la série diverge. Le *rayon de convergence* R peut dans certains cas particuliers être égal à 0 ou à ∞. Aux extrémités de l'intervalle de convergence $x=a\pm R$ la série entière peut aussi bien converger que diverger. L'intervalle de convergence se définit d'ordinaire à l'aide des critères de D'Alembert ou de Cauchy appliqués aux séries dont les termes généraux sont les valeurs absolues des termes de la série donnée (3).

En appliquant à la série des valeurs absolues

$$|c_0|+|c_1||x-a|+\ldots+|c_n||x-a|^n+\ldots$$

les critères de convergence de D'Alembert et de Cauchy, on trouve respectivement pour le rayon de convergence de la série entière (3) les formules

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{et} \quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Cependant, il faut appliquer ces formules avec beaucoup de prudence, car les limites du second membre de ces formules n'existent pas très souvent. Ainsi, si l'on a une infinité de coefficients c_n nuls (ceci a lieu, en particulier, si la série contient seulement les puissances paires ou impaires de $(x-a)$), alors les formules indiquées ne peuvent être

appliquées. Ceci étant, on recommande, quand on détermine l'intervalle de convergence, d'appliquer directement le critère de D'Alembert ou de Cauchy, comme on l'a fait ci-dessus, pour étudier la série (2) sans avoir recours aux formules générales du rayon de convergence.

Si $z = x + iy$ est une variable complexe, il existe alors pour la série entière

$$c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots \quad (4)$$

($c_n = a_n + ib_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$) un cercle (*cercle de convergence*) $| z - z_0 | < R$ de centre au point $z = z_0$ à l'intérieur duquel la série converge absolument; pour $| z - z_0 | > R$ la série diverge. Pour les points de la circonférence du cercle de convergence, la série (4) peut aussi bien converger que diverger. On définit d'ordinaire le cercle de convergence à l'aide des critères de D'Alembert ou de Cauchy appliqués à la série

$$| c_0 | + | c_1 | \, | z - z_0 | + | c_2 | \, | z - z_0 |^2 + \ldots$$
$$\ldots + | c_n | \, | z - z_0 |^n + \ldots$$

dont les termes sont les modules des termes de la série donnée. Ainsi, à l'aide du critère de D'Alembert on peut facilement remarquer que le cercle de convergence de la série

$$\frac{z+1}{1\cdot 2} + \frac{(z+1)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(z+1)^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$$

est défini par l'inégalité $| z + 1 | < 2$ (il suffit de répéter les calculs donnés à la page 344 servant à déterminer l'intervalle de convergence de la série (2) en remplaçant x par z). Le centre du cercle de convergence est le point $z = -1$, le rayon R de cercle (rayon de convergence) est égal à 2.

3°. Convergence uniforme. La série de fonctions (1) converge uniformément sur un intervalle si quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut trouver un N indépendant de x tel que pour $n > N$ et pour tous les x dans l'intervalle donné l'inégalité $| R_n (x) | < \varepsilon$, où $R_n (x)$ et le reste de la série, est satisfaite.

Si $| f_n (x) | \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, alors la série de fonctions (1) converge absolument et uniformément sur le segment $[a, b]$ (*critère de Weierstrass*).

La série entière (3) converge absolument et uniformément sur chaque segment intérieur à son intervalle de convergence. La série entière (3) peut être dérivée et intégrée terme à terme à l'intérieur de son intervalle de convergence (pour $| x - a | < R$), c'est-à-dire si

$$c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \ldots + c_n (x - a)^n + \ldots = f (x), \quad (5)$$

alors pour x arbitraire dans l'intervalle de convergence de la série (3) on a

$$c_1 + 2c_2 (x - a) + \ldots + nc_n (x - a)^{n-1} + \ldots = f' (x), \quad (6)$$

$$\int_{x_0}^{x} c_0\,dx + \int_{x_0}^{x} c_1(x-a)\,dx + \int_{x_0}^{x} c_2(x-a)^2\,dx + \ldots +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} c_n(x-a)^n\,dx + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}(x_0-a)^{n+1}}{n+1} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad (7)$$

(le nombre x_0 appartient aussi à l'intervalle de convergence de la série (3)). En outre, les séries (6) et (7) ont le même intervalle de convergence que la série (3).

Déterminer le domaine de convergence des séries:

2510. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2511. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$.

2512. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

2513. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2514. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$.

2515**. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

2516. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$.

2517. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

2518. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$.

2519. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$.

2520. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

2521. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

2522. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$.

2523. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$.

2524*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$.

2525. $\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$.

Déterminer l'intervalle de convergence des séries entières et étudier la convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence:

2526. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

2527. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2528. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2529. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

2530. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

2531. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

2532. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.

2533. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2534. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$.

2535. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

2536. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$.

2537. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.

2538. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

2539. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$.

2540. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$.

2541. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

2542**. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$.

2543*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n^n}$.

2544*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

2545. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

2546. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

2547. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

2548. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

2549. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

2550. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$.

2551. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) 2^n}$.

2553. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

2554. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

2555. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2556. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2557. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2558. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

2559*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$.

2560. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$.

2561. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

2562. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}$.

2563. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

Déterminer le cercle de convergence:

2564. $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$.

2565. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)z^n$.

2566. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n\cdot 3^n}$.

2567. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$.

2568. $(1+2i)+(1+2i)(3+2i)z+\ldots+$
$+(1+2i)(3+2i)\ldots(2n+1+2i)z^n+\ldots$

2569. $1+\frac{z}{1-i}+\frac{z^2}{(1-i)(1-2i)}+\cdots$
$\cdots+\frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\ldots(1-ni)}+\cdots$

2570. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

2571. En partant de la définition de la convergence uniforme, démontrer que la série

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

ne converge pas uniformément dans l'intervalle $(-1, 1)$, mais converge uniformément sur tout segment intérieur à cet intervalle.

Solution. D'après la formule de la somme de la progression géométrique, on a pour $|x| < 1$

$$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Prenons à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$ le segment $[-1+\alpha, 1-\alpha]$, où α est un nombre positif aussi petit qu'on le veut. Sur ce segment $|x| \leqslant 1-\alpha$, $|1-x| \geqslant \alpha$ et, par conséquent,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}.$$

Pour démontrer la convergence uniforme de la série donnée sur le segment $[-1+\alpha, 1-\alpha]$, il faut démontrer que, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut choisir un N dépendant seulement de ε tel que, pour chaque $n > N$, l'inégalité $|R_n(x)| < \varepsilon$ est satisfaite pour tous les x du segment considéré.

Prenant un $\varepsilon > 0$ arbitraire, exigeons que $\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \varepsilon$; d'où $(1-\alpha)^{n+1} < \varepsilon\alpha$, $(n+1)\ln(1-\alpha) < \ln(\varepsilon\alpha)$, c'est-à-dire $n+1 > \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}$ (puisque $\ln(1-\alpha) < 0$) et $n > \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$. Ainsi, en prenant $N = \frac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$, nous pouvons nous convaincre que, pour $n > N$, on a bien $|R_n(x)| < \varepsilon$ pour tous les x du segment $[-1+\alpha, 1-\alpha]$, ce qui démontre la convergence uniforme de la série donnée sur tout segment intérieur à l'intervalle $(-1, 1)$.

En ce qui concerne l'intervalle entier $(-1, 1)$, il contient des points aussi voisins que l'on veut du point $x = 1$, et comme $\lim\limits_{x\to 1} R_n(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$, alors, aussi grand que soit n, on peut trouver des points x pour lesquels $R_n(x)$ est supérieur à tout nombre aussi grand qu'on veut. Par conséquent, il n'est pas possible d'indiquer un N tel que, pour $n > N$, l'inégalité $|R_n(x)| < \varepsilon$ soit vérifiée pour tous les points de l'intervalle $(-1, 1)$, ce qui signifie que la convergence de la série dans l'intervalle $(-1, 1)$ n'est pas uniforme.

2572. En partant de la définition de la convergence uniforme, démontrer que:

a) la série

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

converge uniformément sur tout intervalle fini;

b) la série

$$\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}+\ldots$$

converge uniformément dans tout l'intervalle de convergence $(-1, 1)$;

c) la série

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

converge uniformément dans l'intervalle $(1+\delta, \infty)$, où δ est un nombre positif arbitraire;

d) la série

$$(x^2-x^4)+(x^4-x^6)+(x^6-x^8)+\ldots$$
$$\ldots+(x^{2n}-x^{2n+2})+\ldots$$

converge non seulement à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 1)$, mais aussi aux extrémités de cet intervalle. Néanmoins, la convergence de la série dans l'intervalle $(-1, 1)$ n'est pas uniforme.

Démontrer la convergence uniforme des séries de fonctions dans les intervalles indiqués:

2573. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ sur le segment $[-1, 1]$.

2574. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ sur tout l'axe numérique.

2575. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ sur le segment $[0, 1]$.

En appliquant la différentiation et l'intégration terme à terme, trouver les sommes des séries:

2576. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

2577. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

2578. $x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$

2579. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$

2580. $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$

2581. $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$

2582. $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n+1)x^{n-1}+\ldots$

Trouver la somme des séries:

2583. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots$

2584. $x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$

2585*. $1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}+\ldots$

2586. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

§ 3. Série de Taylor

1°. Développement d'une fonction en série entière. Si la fonction $f(x)$ admet, dans le voisinage $|x-a|<R$ du point a, un développement en série entière suivant les puissances de $x-a$, cette série (*série de Taylor*) est de la forme

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (1)$$

Pour $a=0$ la série de Taylor s'appelle aussi *série de Maclaurin*. L'égalité (1) est vraie si pour $|x-a|<R$ le *reste* de la série de Taylor

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]\to 0$$

pour $n\to\infty$.

Pour évaluer le reste on peut utiliser la formule

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],\ \text{où}\ 0<\theta<1 \qquad (2)$$

(*forme de Lagrange du reste*).

Exemple 1. Développer la fonction $f(x)=\operatorname{ch}x$ en série suivant les puissances de x.

Solution. Trouvons les dérivées de la fonction $f(x)=\operatorname{ch}x$, $f'(x)=\operatorname{sh}x$, $f''(x)=\operatorname{ch}x$, $f'''(x)=\operatorname{sh}x$, ... et en général $f^{(n)}(x)=\operatorname{ch}x$ si n est pair, $f^{(n)}(x)=\operatorname{sh}x$ si n est impair. En faisant $a=0$, nous trouvons $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=0$, ... et en général $f^{(n)}(0)=1$ si n est pair et $f^{(n)}(0)=0$ si n est impair.

D'où, d'après la formule (1), on a

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{3}$$

Pour déterminer l'intervalle de convergence de la série (3), appliquons le critère de D'Alembert. On a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

pour x arbitraire. Par conséquent, la série converge dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$. Le reste, d'après la formule (2), est de la forme

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{ch} \theta x, \text{ si } n \text{ est impair et}$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sh} \theta x, \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Puisque $0 > \theta > 1$,

$$|\operatorname{ch} \theta x| = \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2} \leqslant e^{|x|}, \quad |\operatorname{sh} \theta x| = \left| \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2} \right| \leqslant e^{|x|}$$

et par suite $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. La série de terme général $\frac{|x|^n}{n!}$ converge pour x arbitraire (on peut s'en convaincre à l'aide du critère de D'Alembert) et par suite d'après le critère nécessaire de convergence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour x arbitraire. Ceci signifie que la somme de la série (3) pour x arbitraire est effectivement égale à $\operatorname{ch} x$.

2°. Procédés appliquables pour développer en séries entières.

Dans de nombreux cas, on aura recours aux développements fondamentaux suivants:

$$\text{I. } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{II. } \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

IV. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1)\ ^{*)}$$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

$(-1 < x \leqslant 1)$,

ainsi qu'à la formule donnant la somme d'une progression géométrique pour trouver le développement en série entière d'une fonction donnée; en outre, on n'aura pas besoin d'étudier le reste. Pour avoir un développement, il est parfois utile d'utiliser la dérivation et l'intégration terme à terme. On recommande de développer les fonctions rationnelles en éléments simples avant de les développer en séries entières.

Exemple 2. Développer la fonction

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

suivant les puissances de x **).

Solution. On a, en développant la fonction en éléments simples,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Puisque

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{4}$$

et

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, \tag{5}$$

on a finalement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}]\, x^n. \tag{6}$$

---

*) Aux extrémités de l'intervalle de convergence (c'est-à-dire pour $x = -1$ et pour $x = 1$) le développement IV se comporte de la manière suivante: pour $m \geqslant 0$ la série converge absolument aux deux extrémités de l'intervalle de convergence, pour $0 > m > -1$ elle diverge pour $x = -1$ et est semi-convergente pour $x = 1$; pour $m \leqslant -1$ elle diverge aux deux extrémités de l'intervalle de convergence.

**) Ici et dans la suite, on a en vue « suivant les puissances entières et positives ».

Les progressions géométriques (4) et (5) convergent respectivement pour $|x| < 1$ et $|x| < \frac{1}{2}$; par conséquent, la formule (6) est valable pour $|x| < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

3°. Série de Taylor pour les fonctions de deux variables. Le développement d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables en *série de Taylor* au voisinage du point (a, b) est de la forme:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a, b) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b) + \ldots \qquad (7)$$

Si $a = b = 0$, la série de Taylor s'appelle aussi *série de Maclaurin*. On utilise ici les notations suivantes:

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(a, b) = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} (x-a) +$$

$$+ \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} (y-b);$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a, b) = \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} (x-a)^2 +$$

$$+ 2\left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} (x-a)(y-b) + \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} (y-b)^2, \text{ etc.}$$

Le développement (7) a lieu si le reste de la série

$$R_n(x, y) = f(x, y) -$$

$$- \left\{f(a, b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a, b)\right\} \to 0$$

pour $n \to \infty$. Le reste peut être mis sous la forme

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x, y)\Big|_{\substack{x=a+\theta(x-a)\\y=b+\theta(y-b)}}$$

où $0 < \theta < 1$.

Développer suivant les puissances entières et positives de x les fonctions indiquées; déterminer les intervalles de convergence des séries obtenues et étudier le comportement

de leurs restes:

2587. $a^x\ (a>0)$.

2588. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

2589. $\cos(x+a)$.

2590. $\sin^2 x$.

2591*. $\ln(2+x)$.

En utilisant les principaux développements I — V et la progression géométrique, former le développement suivant les puissances de x des fonctions suivantes et indiquer les intervalles de convergence des séries obtenues:

2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$.

2593. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

2594. xe^{-2x}.

2595. e^{x^2}.

2596. $\operatorname{sh} x$.

2597. $\cos 2x$.

2598. $\cos^2 x$.

2599. $\sin 3x + x\cos 3x$.

2600. $\frac{x}{9+x^2}$.

2601. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

2602. $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2603. $\ln(1+x-2x^2)$.

En appliquant la dérivation, développer suivant les puissances de x les fonctions suivantes et indiquer les intervalles dans lesquels ces développements sont valables:

2604. $(1+x)\ln(1+x)$.

2605. $\operatorname{arctg} x$.

2606. $\arcsin x$.

2607. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

En appliquant différents procédés, développer suivant les puissances de x les fonctions données et indiquer les intervalles dans lesquels ces développements sont valables:

2608. $\sin^2 x\cos^2 x$.

2609. $(1+x)e^{-x}$.

2610. $(1+e^x)^3$.

2611. $\sqrt[3]{8+x}$.

2612. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

2613. $\operatorname{ch}^3 x$.

2614. $\frac{1}{4-x^4}$.

2615. $\ln(x^2+3x+2)$.

2616. $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2617. $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$.

2618. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+x)\,dx}{x}$.

2619. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Donner les trois premiers termes non nuls du développement en série suivant les puissances de x des fonctions:

2620. $\operatorname{tg} x$.
2621. $\operatorname{th} x$.
2622. $e^{\cos x}$.
2623. $\sec x$.
2624. $\ln \cos x$.
2625. $e^x \sin x$.

2626*. Montrer que pour calculer la longueur de l'ellipse on peut avoir recours à la formule approchée

$$s \approx 2\pi a\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

où ε est l'excentricité et $2a$ le grand axe de l'ellipse.

2627. Un câble pesant prend sous l'action de son propre poids la forme de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, avec $a = \frac{H}{q}$ où H est la tension horizontale du câble, q le poids de l'unité de longueur. Montrer que pour les petits x on peut admettre que le câble prend la forme de la parabole $y = a + \frac{x^2}{2a}$ au terme de x^4 près.

2628. Développer la fonction $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ en série suivant les puissances de $x + 4$.

2629. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$. Développer $f(x+h)$ en série suivant les puissances de h.

2630. Développer $\ln x$ en série suivant les puissances de $x - 1$.

2631. Développer $\frac{1}{x}$ en série suivant les puissances $x - 1$.

2632. Développer $\frac{1}{x^2}$ en série suivant les puissances de $x + 1$.

2633. Développer $\frac{1}{x^2+3x+2}$ en série suivant les puissances de $x + 4$.

2634. Développer $\frac{1}{x^2+4x+7}$ en série suivant les puissances de $x + 2$.

2635. Développer e^x en série suivant les puissances de $x + 2$.

2636. Développer $\sqrt{x}$ en série suivant les puissances de $x - 4$.

2637. Développer $\cos x$ en série suivant les puissances de $x - \frac{\pi}{2}$.

2638. Développer $\cos^2 x$ en série suivant les puissances de $x - \frac{\pi}{4}$.

2639*. Développer $\ln x$ en série suivant les puissances de $\frac{1-x}{1+x}$.

2640. Développer $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ en série suivant les puissances de $\frac{x}{1+x}$.

2641. Quelle est l'erreur commise si on prend approximativement

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}?$$

2642. Avec quelle précision on calcule le nombre $\frac{\pi}{4}$ si on a recours à la série

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

quand on prend la somme de 5 premiers termes pour $x = 1$?

2643*. Calculer le nombre $\frac{\pi}{6}$ à 0,001 près en développant la fonction $\arcsin x$ en série suivant les puissances de x (voir exemple 2606).

2644. Combien faut-il prendre de termes dans la série

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

pour calculer $\cos 18°$ à 0,001 près?

2645. Combien faut-il prendre de termes dans la série

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

pour calculer $\sin 15°$ à 0,0001 près?

2646. Combien faut-il prendre de termes dans la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

pour déterminer le nombre e à 0,0001 près?

2647. Combien faut-il prendre de termes dans la série

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots$$

pour calculer $\ln 2$ à 0,01, à 0,001 près?

2648. Calculer $\sqrt[3]{7}$ à 0,01 près en développant la fonction $\sqrt[3]{8+x}$ en série suivant les puissances de x.

2649. Expliquer l'origine de la formule approchée $\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$ $(a>0)$, calculer $\sqrt{23}$ à l'aide de cette formule en posant $a=5$ et évaluer l'erreur commise.

2650. Calculer $\sqrt[4]{19}$ à 0,001 près.

2651. Pour quelles valeurs de x la formule approchée

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$$

donne une erreur inférieure respectivement à 0,01, 0,001, 0,0001?

2652. Pour quelles valeurs de x la formule approchée

$$\sin x\approx x$$

donne une erreur inférieure respectivement à 0,01, 0,001?

2653. Calculer $\int\limits_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}\,dx$ à 0,0001 près.

2654. Calculer $\int\limits_0^{1}e^{-x^2}\,dx$ à 0,0001 près.

2655. Calculer $\int\limits_0^{1}\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$ à 0,001 près.

2656. Calculer $\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ à 0,001 près.

2657. Calculer $\int\limits_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}\,dx$ à 0,0001 près.

2658. Calculer $\int\limits_0^{1/9}\sqrt{x}\,e^x\,dx$ à 0,001 près.

2659. Développer la fonction $\cos(x-y)$ en série suivant les puissances de x et y, trouver le domaine de convergence de la série obtenue et étudier le reste.

Former les développements suivant les puissances de x et y des fonctions suivantes et indiquer le domaine de convergence des séries:

2660. $\sin x \cdot \sin y$.

2661. $\sin(x^2+y^2)$.

2662*. $\frac{1-x+y}{1+x-y}$.

2663*. $\ln(1-x-y+xy)$.

2664*. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

2665. $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Développer $f(x+h, y+k)$ suivant les puissances de h et k.

2666. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$. Déterminer l'accroissement de cette fonction quand on passe des valeurs $x = 1$, $y = 2$ aux valeurs $x = 1 + h$, $y = 2 + k$.

2667. Développer la fonction e^{x+y} suivant les puissances de $x - 2$ et $y + 2$.

2668. Développer la fonction $\sin(x+y)$ suivant les puissances de x et $y - \frac{\pi}{2}$.

Donner trois ou quatre premiers termes du développement en série des fonctions

2669. $e^x \cos y$ 2670. $(1+x)^{1+y}$

suivant les puissances de x et y.

§ 4. Séries de Fourier

1°. Théorème de Dirichlet. On dit que la fonction $f(x)$ satisfait aux *conditions de Dirichlet* dans l'intervalle (a, b) si dans cet intervalle cette fonction

1) est uniformément bornée, c'est-à-dire $|f(x)| \leqslant M$ pour $a < b$, où M est une constante;

2) n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire en chaque point de discontinuité la fonction $f(x)$ possède une limite à gauche finie $f(\xi-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi-\varepsilon)$ et une limite à droite finie $f(\xi+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$;

3) n'a qu'un nombre fini d'extrémums stricts.

Le *théorème de Dirichlet* affirme que si une fonction continue $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ alors, en chaque point x de cet intervalle, cette fonction peut être

développée en série trigonométrique de Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+$$

$$+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots, \qquad (1)$$

où les *coefficients de Fourier* a_n et b_n se calculent d'après les formules

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Si x, appartenant à l'intervalle $(-\pi,\ +\pi)$ est un point de discontinuité de la fonction $f(x)$, la somme $S(x)$ de la série de Fourier est égale à la moyenne arithmétique des limites à gauche et à droite de la fonction

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Aux extrémités de l'intervalle, c'est-à-dire pour $x=-\pi$ et $x=\pi$

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)].$$

2°. Séries de Fourier non complètes. Si la fonction $f(x)$ est paire (c'est-à-dire $f(-x)=f(x)$), alors dans la formule (1)

$$b_n=0\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

et

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Si la fonction $f(x)$ est impaire (c'est-à-dire $f(-x)=-f(x)$), alors $a_n=0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ et

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Une fonction donnée dans l'intervalle $(0,\ \pi)$ peut être prolongée dans l'intervalle $(-\pi,\ 0)$ soit d'une manière paire, soit d'une manière impaire; par conséquent, on peut la développer sur l'intervalle $(0,\ \pi)$ en série de Fourier non complète suivant les sinus ou les cosinus des arcs multiples.

3°. Séries de Fourier de période de $2l$. Si la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet dans l'intervalle $(-l,\ l)$ de longueur $2l$, alors aux points de continuité de cette fonc-

tion intérieurs à cet intervalle, on a le développement

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+$$
$$+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots+a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\ldots,$$

où

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\ (n=1,\ 2,\ \ldots).\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Aux points de discontinuité de la fonction $f(x)$ et aux extrémités $x=\pm l$ de l'intervalle, la somme de la série de Fourier se définit d'une manière analogue à celle donnée pour l'intervalle $(-\pi,\ \pi)$.

Dans le cas du développement d'une fonction $f(x)$ en série de Fourier dans un intervalle quelconque $(a,\ a+2l)$ de longueur $2l$, les limites d'intégration dans les formules (2) doivent être respectivement remplacées par a et $a+2l$.

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi,\ \pi)$ les fonctions données ci-dessous, déterminer la somme de la série correspondante aux points de discontinuité et aux extrémités de l'intervalle $(x=-\pi,\ x=\pi)$, construire le graphique de la fonction et de la somme de la série correspondante (et aussi à l'extérieur de l'intervalle $(-\pi,\ \pi)$) :

2671. $f(x)=\begin{cases} c_1 & \text{pour } -\pi<x\leqslant 0,\\ c_2 & \text{pour } 0<x<\pi.\end{cases}$

Considérer le cas particulier quand $c_1=-1$, $c_2=1$.

2672. $f(x)=\begin{cases} ax & \text{pour } -\pi<x\leqslant 0,\\ bx & \text{pour } 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

Considérer les cas particuliers : a) $a=b=1$; b) $a=-1$, $b=1$; c) $a=0$, $b=1$; d) $a=1$, $b=0$.

2673. $f(x)=x^2$.
2674. $f(x)=e^{ax}$.
2675. $f(x)=\sin ax$.
2676. $f(x)=\cos ax$.
2677. $f(x)=\operatorname{sh} ax$.
2678. $f(x)=\operatorname{ch} ax$.

2679. Développer la fonction $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ en série de Fourier dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

2680. Développer la fonction $f(x)=\frac{\pi}{4}$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ suivant les sinus des arcs multiples. Utiliser ce résultat pour sommer les séries numériques:

$$\text{a) } 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\text{ ; b) } 1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\ldots\text{ ;}$$

$$\text{c) } 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots$$

Développer les fonctions indiquées ci-dessous en série de Fourier non complètes dans l'intervalle $(0, \pi)$: a) suivant les sinus des arcs multiples, b) suivant les cosinus des arcs multiples. Construire les graphiques des fonctions et les graphiques des sommes des séries correspondantes dans leurs domaines d'existence.

2681. $f(x) = x$. Trouver à l'aide du développement obtenu la somme de la série

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

2682. $f(x) = x^2$. Trouver à l'aide du développement obtenu la somme des séries numériques

$$1)\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\text{ ; } 2)\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$$

2683. $f(x)=e^{ax}$.

2684. $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pour } 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ pour } \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi. \end{cases}$

2685. $f(x)=\begin{cases} x \text{ pour } 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ \pi-x \text{ pour } \frac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

Développer dans l'intervalle $(0, \pi)$ les fonctions suivant les sinus des arcs multiples:

2686. $f(x)=\begin{cases} x \text{ pour } 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ pour } \frac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

2687. $f(x)=x(\pi-x)$.

2688. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$.

Développer dans l'intervalle $(0, \pi)$ les fonctions suivant les cosinus des arcs multiples:

2689. $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pour } 0<x\leqslant h, \\ 0 \text{ pour } h<x<\pi. \end{cases}$

2690. $f(x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2h} \text{ pour } 0<x\leqslant 2h, \\ 0 \text{ pour } 2h<x<\pi. \end{cases}$

2691. $f(x)=x\sin x$.

2692. $f(x)=\begin{cases} \cos x \text{ pour } 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ -\cos x \text{ pour } \frac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

2693. En utilisant le développement des fonctions x et x^2 dans l'intervalle $(0, \pi)$ suivant les cosinus des arcs multiples (voir n°s 2681, 2682), démontrer l'égalité:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

2694**. Démontrer que si la fonction $f(x)$ est paire et si $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, sa série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ est donnée par un développement en cosinus des multiples impairs des arcs, et si la fonction $f(x)$ est impaire avec $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, alors elle se développe dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ suivant les sinus des multiples impairs des arcs.

Développer les fonctions en série de Fourier dans les intervalles indiqués:

2695. $f(x) = |x| \ (-1 < x < 1)$.

2696. $f(x) = 2x \ (0 < x < 1)$.

2697. $f(x) = e^x \quad (-l < x < l)$.
2698. $f(x) = 10 - x \quad (5 < x < 15)$.

Développer les fonctions suivantes en série de Fourier non complètes dans les intervalles indiqués: a) suivant les sinus des arcs multiples et b) suivant les cosinus des arcs multiples:

2699. $f(x) = 1 \quad (0 < x < 1)$.
2700. $f(x) = x \quad (0 < x < l)$.
2701. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < 2\pi)$.
2702. $f(x) = \begin{cases} x \text{ pour } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x \text{ pour } 1 < x < 2. \end{cases}$

2703. Développer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \frac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ 3 - x \text{ pour } 2 < x < 3 \end{cases}$$

suivant les cosinus des arcs multiples dans l'intervalle $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

CHAPITRE IX

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Solutions. Equations différentielles de familles de courbes. Conditions initiales

1°. Notions fondamentales. Une équation de la forme

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

où $y = y(x)$ est une fonction inconnue, s'appelle *équation différentielle du n-ième ordre*. La fonction $y = \varphi(x)$ qui transforme en identité l'équation (1) s'appelle *solution* de cette équation et le graphique de cette fonction *courbe intégrale*. Si la solution est donnée sous forme implicite $\Phi(x, y) = 0$, on dit d'ordinaire que c'est une *intégrale*.

Exemple 1. Vérifier si la fonction $y = \sin x$ est une solution de l'équation

$$y'' + y = 0.$$

Solution. On a

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$$

et, par conséquent,

$$y'' + y = -\sin x + \sin x \equiv 0.$$

L'intégrale

$$\Phi(x, y_1, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{2}$$

de l'équation différentielle (1) contenant n constantes arbitraires indépendantes $C_1, \ldots, C_n$ et équivalente (dans le domaine donné) à l'équation (1) s'appelle l'*intégrale générale* de cette équation (dans le domaine correspondant). En donnant aux constantes $C_1, \ldots, C_n$ de (2) des valeurs définies on obtient une *intégrale particulière*.

Inversement, étant donné une famille de courbes (2), en éliminant les paramètres $C_1, \ldots, C_n$ entre les équations

$$\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \ \ldots, \quad \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0,$$

on obtient en général une équation différentielle du type (1), dont la relation (2) est l'intégrale générale dans le domaine correspondant.

Exemple 2. Former l'équation différentielle de la famille de paraboles

$$y = C_1(x - C_2)^2. \tag{3}$$

S o l u t i o n. En dérivant deux fois l'équation (3), on a

$$y' = 2C_1 (x - C_2) \quad \text{et} \quad y'' = 2C_1. \tag{4}$$

En éliminant dans les équations (3) et (4) les paramètres C_1 et C_2 on obtient l'équation différentielle cherchée

$$2yy'' = y'^2.$$

On vérifie facilement que la fonction (3) vérifie identiquement cette équation.

2°. C o n d i t i o n s i n i t i a l e s. Si pour une solution particulière $y = y(x)$ de l'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \tag{5}$$

les *conditions initiales*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, \quad y^{n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

sont données et si on connaît la *solution générale* de l'équation (5)

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

alors les constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_n$ sont déterminées, si cela est possible, par le système

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y'_0 &= \varphi'_x(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\}$$

E x e m p l e 3. Déterminer la courbe de la famille

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \tag{6}$$

qui vérifie

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

S o l u t i o n. On a

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}. \tag{7}$$

En faisant $x = 0$ dans les formules (6) et (7), on a

$$1 = C_1 + C_2, \quad -2 = C_1 - 2C_2,$$

d'où

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1$$

et, par conséquent,

$$y = e^{-2x}.$$

Dire si les fonctions données ci-dessous sont solutions des équations différentielles:

2704. $xy' = 2y, \; y = 5x^3.$

2705. $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

2706. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0, \; y = \dfrac{C^2 - x^2}{2x}.$

2707. $y'' + y = 0, \; y = 3 \sin x - 4 \cos x.$

2708. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0,\ x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$

2709. $y''-2y'+y=0$; a) $y=xe^x$, b) $y=x^2e^x$.

2710. $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0,$
$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}.$

Montrer que les fonctions données ci-dessous sont des intégrales pour les équations différentielles correspondantes:

2711. $(x-2y)y'=2x-y,\ x^2-xy+y^2=C^2.$

2712. $(x-y+1)y'=1,\ y=x+Ce^y.$

2713. $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0,\ y=\ln(xy).$

Former les équations différentielles des familles de courbes données ci-dessous (C, C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires):

2714. $y=Cx.$

2715. $y=Cx^2.$

2716. $y^2=2Cx.$

2717. $x^2+y^2=C^2.$

2718. $y=Ce^x.$

2719. $x^3=C(x^2-y^2).$

2720. $y^2+\frac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$

2721. $\ln\frac{x}{y}=1+ay$ (a est un paramètre).

2722. $(y-y_0)^2=2px$ (y_0, p sont des paramètres).

2723. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$

2724. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$

2725. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3.$

2726. Former l'équation différentielle de toutes les droites du plan OXY.

2727. Former l'équation différentielle de toutes les paraboles du plan OXY d'axe vertical.

2728. Former l'équation différentielle de toutes les circonférences du plan OXY.

Pour les familles des courbes données ci-dessous indiquer celles qui vérifient les conditions initiales correspondantes:

2729. $x^2-y^2=C,\ y(0)=5.$

2730. $y=(C_1+C_2x)e^{2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

2731. $y=C_1\sin(x-C_2),\ y(\pi)=1,\ y'(\pi)=0.$

2732. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x};$
$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-2.$

§ 2. Equations différentielles du premier ordre

1°. Types d'équations différentielles du premier ordre. Une équation différentielle du premier ordre de fonction inconnue y, résolue par rapport à la dérivée y', est de la forme :

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

où $f(x, y)$ est une fonction donnée. Dans certains cas il est plus commode de considérer la variable x comme la fonction inconnue et transcrire l'équation (1) sous la forme

$$x' = g(x, y), \tag{1'}$$

où $g(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$.

Prenant en considération que $y' = \dfrac{dy}{dx}$ et $x' = \dfrac{dx}{dy}$ les équations différentielles (1) et (1') peuvent être mises sous la forme symétrique

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions connues.

Par solution de l'équation (2), on a en vue toute fonction de la forme $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$ vérifiant cette équation. La solution générale de l'équation (1) et (1') ou de l'équation (2) est de la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

où C est une constante arbitraire.

2°. Champ de directions. L'ensemble des directions

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$$

s'appelle *champ de directions* de l'équation différentielle (1) et on le désigne d'ordinaire par un système de traits ou de flèches faisant un angle α l'axe des x.

Les courbes $f(x, y) = k$ aux points desquelles la pente du champ a une valeur constante égale à k s'appelle des *isoclines*. Dans les cas simples, après avoir construit les isoclines et le champ de directions, on peut tracer approximativement le champ des courbes intégrales en considérant ces dernières comme des courbes qui possèdent une direction déterminée du champ en chacun de leurs points.

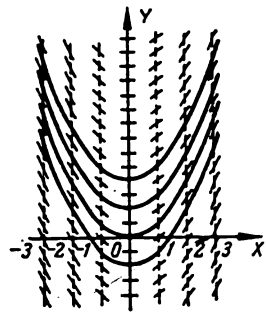


Fig. 105

Exemple 1. Construire par la méthode des isoclines le champ de courbes intégrales de l'équation différentielle

$$y' = x.$$

Solution. Ayant construit les isoclines $x = k$ (droites) et le champ de directions, on en déduit approximativement le champ des courbes intégrales (fig. 105).

La famille des paraboles

$$y=\frac{x^2}{2}+C$$

est l'intégrale générale.

Construire approximativement par la méthode des isoclines le champ des courbes intégrales pour les équations différentielles indiquées ci-dessous:

2733. $y'=-x$.

2734. $y'=-\frac{x}{y}$.

2735. $y'=1+y^2$.

2736. $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

2737. $y'=x^2+y^2$.

3°. Théorème de Cauchy. Si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine $U\{a<x<A,\ b<y<B\}$ et possède dans ce domaine une dérivée $f'_y(x, y)$ bornée, alors par chaque point (x_0, y_0) de U passe une et seulement une courbe intégrale $y=\varphi(x)$ de l'équation (1) $(\varphi(x_0)=y_0)$.

4°. Méthode des lignes polygonales d'Euler. Pour construire approximativement la courbe intégrale de l'équation (1) passant par un point donné $M_0(x_0, y_0)$ on la remplace par une ligne brisée de sommets $M_i(x_i, y_i)$, où

$$x_{i+1}=x_i+\Delta x_i,\quad y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,$$
$$\Delta x_i=h \quad \text{(pas de la construction)},$$
$$\Delta y_i=hf(x_i, y_i) \quad (i=0, 1, 2, \ldots).$$

Exemple 2. Etant donnée l'équation

$$y'=\frac{xy}{2},$$

calculer par la méthode d'Euler $y(1)$, si $y(0)=1$ $(h=0,1)$.

Formons le tableau:

i	x_i	y_i	$\Delta y_i=\frac{x_i y_i}{20}$
0	0	1	0
1	0,1	1	0,005
2	0,2	1,005	0,010
3	0,3	1,015	0,015
4	0,4	1,030	0,021
5	0,5	1,051	0,026
6	0,6	1,077	0,032
7	0,7	1,109	0,039
8	0,8	1,148	0,046
9	0,9	1,194	0,054
10	1,0	1,248	

Ainsi, $y(1) = 1{,}248$. A titre de comparaison, donnons la valeur exacte de $y(1) = e^{1/4} \approx 1{,}284$.

Déterminer à l'aide de la méthode d'Euler les solutions particulières des équations différentielles données pour les valeurs indiquées de x:

2738. $y' = y$, $y(0) = 1$; calculer $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2739. $y' = x + y$, $y(1) = 1$; calculer $y(2)$ $(h = 0{,}1)$.

2740. $y' = -\dfrac{y}{1+x}$, $y(0) = 2$; calculer $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2741. $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, $y(0) = 1$; calculer $y(1)$ $(h = 0{,}2)$.

§ 3. Equations différentielles du premier ordre à variables séparables. Trajectoires orthogonales

1°. Equations du premier ordre à variables séparables. On appelle équation à *variables séparables* toute équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1}$$

ou

$$X(x)\, Y(y)\, dx + X_1(x)\, Y_1(y)\, dy = 0. \tag{1'}$$

En divisant par $g(y)$ et en multipliant par dx les deux membres de l'équation (1), on a $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$. D'où, en intégrant, on trouve l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C. \tag{2}$$

De même, en divisant les deux membres de l'équation (1') par $X_1(x)\, Y(y)$ et en intégrant la nouvelle expression obtenue on trouve la solution générale de l'équation (1') sous la forme

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)} dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)} dy = C. \tag{2'}$$

Si pour la valeur $y = y_0$, nous avons $g(y_0) = 0$, alors la fonction $y = y_0$ est, comme on peut s'en assurer directement, une solution de l'équation (1). De même, les droites $x = a$ et $y = b$ seront des courbes intégrales de l'équation (1') si a et b sont respectivement des racines des équations $X_1(x) = 0$ et $Y(y) = 0$, l'équation différentielle initiale ayant été divisée par les premiers membres de ces équations.

Exemple 1. Intégrer l'équation

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

En particulier, trouver la solution satisfaisant à la condition initiale $y(1) = 2$.

Solution. Mettons l'équation (3) sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

d'où en séparant les variables, on a

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

et, par conséquent,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

où la constante arbitraire est prise sous la forme $\ln C_1$. En se libérant des logarithmes, la solution générale se met sous la forme

$$y = \frac{C}{x}, \tag{4}$$

où $C = \pm C_1$.

On peut perdre la solution $y = 0$ quand on divise par y; mais cette dernière solution est contenue dans la formule (4) pour $C = 0$.

En utilisant les conditions initiales données on trouve $C = 2$ et, par conséquent, la solution particulière cherchée est

$$y = \frac{2}{x}.$$

2°. Quelques équations différentielles se ramenant à des équations à variables séparables. Les équations différentielles de la forme

$$y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$$

se ramènent à des équations différentielles du type (1) à l'aide du changement de variables $u = ax + by + c$, où u est la nouvelle fonction inconnue.

3°. Trajectoires orthogonales. Les trajectoires orthogonales sont des courbes coupant les courbes d'une famille donnée $\Phi(x, y, a) = 0$ (a est un paramètre) sous un angle droit. Si $F(x, y, y') = 0$ est une équation différentielle de la famille, alors

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

est l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

Exemple 2. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille d'ellipses

$$x^2 + 2y^2 = a^2. \tag{5}$$

Solution. En dérivant l'équation (5), on trouve l'équation différentielle de la famille

$$x + 2yy' = 0.$$

D'où, en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$ on trouve l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$x-\frac{2y}{y'}=0 \quad \text{ou} \quad y'=\frac{2y}{x}.$$

En intégrant cette dernière équation on trouve $y = Cx^2$ (famille de paraboles) (fig. 106).

4°. Formation des équations différentielles. Quand on forme l'équation différentielle de certains problèmes géométriques, on a très souvent besoin de se servir de la signification géométrique de la dérivée en tant que tangente de l'angle formé

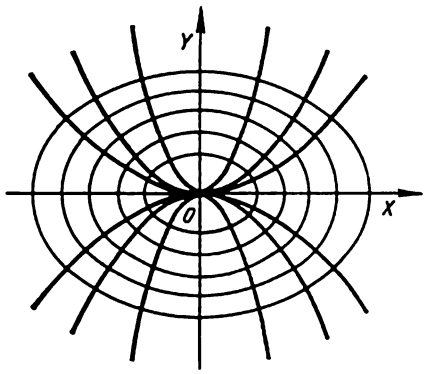


Fig. 106

par la tangente à la courbe et la direction positive de l'axe OX ; cette propriété, dans de nombreux cas, permet d'établir très rapidement une relation entre l'ordonnée y de la courbe inconnue, son abscisse x et la tangente de l'angle de la tangente y', c'est-à-dire d'obtenir une équation différentielle. Dans d'autres cas (voir n°s 2783, 2890, 2895), on a recours à la signification géométrique de l'intégrale définie en tant que l'aire du trapèze curviligne ou la longueur d'un arc de courbe. En outre, d'après la condition du problème on forme directement une équation intégrale très simple (puisque la fonction inconnue participe dans l'intégrale). Cependant, par dérivation de ses deux membres on peut facilement passer à une équation différentielle.

Exemple 3. Déterminer la courbe qui passe par le point (3, 2) et dont toute tangente comprise entre les axes de coordonnées est partagée en deux parties égales par le point de tangence.

Solution. Soit $M(x, y)$ le milieu de la tangente AB, qui, par hypothèse, est le point de tangence (les points A et B étant les points d'intersection de la tangente avec les axes OY et OX). Par hypothèse, $OA = 2y$ et $OB = 2x$, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point $M(x, y)$ est

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{OA}{OB}=-\frac{y}{x}.$$

C'est l'équation différentielle de la courbe cherchée. En la transformant, il vient

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

et, par conséquent,

$$\ln x+\ln y=\ln C \quad \text{ou} \quad xy=C.$$

La condition initiale permet de déterminer $C = 3\cdot 2 = 6$. Ainsi, la courbe cherchée est l'hyperbole $xy = 6$.

Intégrer les équations différentielles:

2742. $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0$.
2743. $xy' - y = y^3$.
2744. $xyy' = 1 - x^2$.
2745. $y - xy' = a(1 + x^2y')$.
2746. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.
2747. $y' \operatorname{tg} x = y$.

Déterminer les solutions particulières vérifiant les conditions initiales données:

2748. $(1+e^x)\, yy' = e^x$, $y=1$ pour $x=0$.

2749. $(xy^2 + x)\, dx + (x^2y - y)\, dy = 0$, $y = 1$ pour $x = 0$.

2750. $y' \sin x = y \ln y$, $y = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Intégrer les équations différentielles à l'aide de changements de variables:

2751. $y' = (x + y)^2$.
2752. $y = (8x + 2y + 1)^2$.
2753. $(2x + 3y - 1)\, dx + (4x + 6y - 5)\, dy = 0$.
2754. $(2x - y)\, dx + (4x - 2y + 3)\, dy = 0$.

Passer aux coordonnées polaires dans les exercices n°s 2755 et 2756.

2755. $y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$.

2756. $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$.

2757*. Déterminer la courbe dont la tangente est égale à la distance de l'origine au point de tangence.

2758. Déterminer la courbe qui jouit de la propriété suivante: en un point arbitraire de la courbe, la normale comprise entre les axes de coordonnées est divisée en deux parties égales par ce point.

2759. Déterminer la courbe dont la sous-tangente est constante et égale à a.

2760. Déterminer la courbe dont la sous-tangente est deux fois plus grande que l'abscisse du point de tangence.

2761*. Déterminer la courbe dont l'abscisse du centre de gravité de l'aire limitée par les axes de coordonnées, cette courbe et l'ordonnée d'un des points quelconques de la courbe est égale aux 3/4 de l'abscisse de ce point.

2762. Déterminer l'équation de la courbe qui passe par le point (3, 1) et jouissant de la propriété suivante: le segment de la tangente compris entre le point de tangence et l'axe OX est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe OY.

2763. Déterminer l'équation de la courbe qui passe par le point (2, 0) si le segment de la tangente à la courbe compris entre le point de tangence et l'axe OY a une longueur constante égale à 2.

Déterminer les trajectoires orthogonales des familles de courbes données (a est le paramètre), construire ces familles ainsi que leurs trajectoires orthogonales.

2764. $x^2 + y^2 = a^2$.

2765. $y^2 = ax$.

2766. $xy = a$.

2767. $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

§ 4. Equations différentielles homogènes du premier ordre

1°. Equations homogènes. L'équation différentielle

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

est par définition *homogène* si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions homogènes du même degré. L'équation (1) peut être mise sous la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

et à l'aide de la substitution $y = xu$ où u est la nouvelle fonction inconnue on peut la ramener à une équation à variables séparables. On peut aussi avoir recours à la substitution $x = yu$.

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Solution. Posons $y = ux$, alors $u + xu' = e^u + u$ ou

$$e^{-u}\,du = \frac{dx}{x}.$$

En intégrant, on trouve $u = -\ln\ln\frac{C}{x}$, d'où

$$y = -x\ln\ln\frac{C}{x}.$$

2°. Equations se ramenant à des équations homogènes. Si

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (2)$$

avec $\delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, en faisant alors dans l'équation (2) $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, où les constantes α et β sont déterminées par le système d'équations

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

on se ramène alors à une équation différentielle homogène par rapport aux variables u et v. Si $\delta = 0$, en faisant dans l'équation (2) $a_1x + b_1y = u$, on se ramène à une équation à variables séparables.

Intégrer les équations différentielles:

2768. $y' = \frac{y}{x} - 1$.

2769. $y' = -\frac{x+y}{x}$.

2770. $(x-y)y\,dx - x^2dy = 0$.

2771. Déterminer la famille de courbes intégrales de l'équation $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ et déterminer les courbes qui passent respectivement par les points (4, 0) et (1, 1).

2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

2773. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

2774. $(4x^2 + 3xy + y^2)\,dx + (4y^2 + 3xy + x^2)\,dy = 0$.

2775. Trouver la solution particulière de l'équation $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ passant par le point $x = 2$, $y = 1$.

Intégrer les équations:

2776. $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$.

2777. $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

2778. $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

2779. Trouver l'équation de la courbe qui passe par le point (1, 0) et qui jouit de la propriété que le segment de l'axe OY limité par l'origine des coordonnées et le point d'intersection de cet axe avec la tangente est égal au rayon polaire du point de tangence.

2780**. Quelle forme doit avoir le miroir d'un projecteur pour que les rayons issus d'une source lumineuse ponctuelle se réfléchissent en faisceau parallèle?

2781. Déterminer l'équation de la courbe dont la sous-tangente est égale à la moyenne arithmétique des coordonnées du point de tangence.

2782. Déterminer l'équation de la courbe telle que le segment de l'axe des ordonnées limité par l'origine et le point d'intersection de la normale en un point arbitraire de la courbe est égal à la distance de ce point à l'origine.

2783*. Déterminer l'équation de la courbe telle que l'aire limitée par l'axe des abscisses, la courbe et deux ordonnées, dont l'une est constante et l'autre variable, est égale au rapport du cube de l'ordonnée variable à l'abscisse correspondante.

2784. Déterminer la courbe telle que le segment de l'axe des ordonnées limité par l'origine et le point d'intersection d'une tangente quelconque est égal à l'abscisse du point de tangence.

§ 5. Equations linéaires du premier ordre. Equations de Bernoulli

1°. Equations linéaires. Une équation différentielle de la forme

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \tag{1}$$

du premier degré en y et y' est appelée équation *linéaire*.

Si la fonction $Q(x) \equiv 0$, l'équation (1) est de la forme

$$y' + P(x)\,y = 0 \tag{2}$$

et s'appelle équation différentielle *linéaire homogène*. Dans ce cas les variables se séparent et la solution générale de l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{3}$$

Pour intégrer l'équation linéaire non homogène (1), on applique la méthode dite de la *variation de la constante arbitraire*; cette méthode consiste à trouver d'abord la solution générale de l'équation linéaire homogène correspondante, c'est-à-dire la relation (3). Ensuite, on suppose dans cette formule que la grandeur C est fonction de x et on cherche la solution de l'équation non homogène (1) sous la forme (3). Pour cela, on substitue dans l'équation (1) y et y' données par (3) et de l'équation différentielle ainsi obtenue on détermine la fonction $C(x)$. Ainsi, la solution générale de l'équation non homogène (1)

s'obtient sous la forme

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Exemple 1. Intégrer l'équation

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

Solution. L'équation homogène correspondante est

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

En l'intégrant, on trouve

$$y = C \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

En supposant C fonction de x, en la dérivant, on a

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C.$$

En substituant y et y' dans l'équation (4), il vient

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot C = \operatorname{tg} x \cdot \frac{C}{\cos x} + \cos x, \text{ ou } \frac{dC}{dx} = \cos^2 x$$

d'où

$$C(x) = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (4) est

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Pour trouver la solution de l'équation linéaire (1), on peut encore appliquer la substitution

$$y = uv \tag{5}$$

où u et v sont des fonctions de x. Alors, l'équation (1) prend la forme

$$[u' + P(x)\,u]\,v + v'u = Q(x). \tag{6}$$

Si on exige que

$$u' + P(x)\,u = 0, \tag{7}$$

de (7) on déduit u, ensuite de (6) on détermine v et, par conséquent, de (5) on trouve y.

2°. Equation de Bernoulli. Une équation du 1-er ordre de la forme

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha},$$

où $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ s'appelle *équation de Bernoulli*. Elle se ramène à une équation linéaire à l'aide de la substitution $z = y^{1-\alpha}$. On peut aussi appliquer directement la substitution $y = uv$ ou la méthode de la variation de la constante arbitraire.

Exemple 2. Intégrer l'équation

$$y' = \frac{4}{x} y + x \sqrt{y}.$$

Solution. C'est une équation de Bernoulli. En posant

$$y = uv$$

on trouve

$$u'v + v'u = \frac{4}{x} uv + x \sqrt{uv} \quad \text{ou} \quad v \left(u' - \frac{4}{x} u\right) + v'u = x \sqrt{uv}. \qquad (8)$$

Pour déterminer la fonction u, exigeons que l'on ait

$$u' - \frac{4}{x} u = 0,$$

d'où

$$u = x^4.$$

En substituant cette expression dans l'équation (8), on trouve

$$v'x^4 = x \sqrt{vx^4},$$

d'où on déduit v:

$$v = \left(\frac{1}{2} \ln x + C\right)^2$$

et, par conséquent, la solution générale est de la forme

$$y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln x + C\right)^2.$$

Trouver les intégrales générales des équations:

2785. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$

2786. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1 + y^2)\, dx = \left(\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy\right) dy.$

2788. $y^2\, dx - (2xy + 3)\, dy = 0.$

Trouver les solutions particulières vérifiant les conditions données:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ pour $x = a$.

2790. $y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0$; $y = 0$ pour $x = 0$.

2791. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; $y = 0$ pour $x = 0$.

Trouver la solution générale des équations :

2792. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$.

2793. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$.

2794. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$.

2795. $3x\,dy = y\,(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)\,dx$.

2796. Soient données trois solutions particulières y, y_1, y_2 d'une équation linéaire. Démontrer que l'expression $\frac{y_2-y}{y-y_1}$ conserve une valeur constante pour x arbitraire. Donner le sens géométrique de ce résultat.

2797. Déterminer les courbes pour lesquelles l'aire du triangle formé par l'axe OX, la tangente et le rayon vecteur du point de tangence est constante.

2798. Déterminer l'équation de la courbe dont le segment de l'axe des abscisses limité par l'origine et le point d'intersection de la tangente est égal au carré de l'ordonnée du point de tangence.

2799. Déterminer l'équation de la courbe dont le segment de l'axe des ordonnées limité par l'origine et la tangente est égal à la sous-normale.

2800. Déterminer l'équation de la courbe dont le segment de l'axe des ordonnées limité par l'origine et la tangente est proportionnel au carré de l'ordonnée du point de tangence.

2801. Déterminer l'équation de la courbe dont la tangente est égale à la distance du point d'intersection de cette tangente avec l'axe OX au point $M\,(0, a)$.

§ 6. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant

1°. Equations aux différentielles totales. Si pour l'équation différentielle

$$P\,(x, y)\,dx + Q\,(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

l'égalité $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ est satisfaite, l'équation (1) peut alors être transcrite sous la forme $dU\,(x, y) = 0$ et s'appelle *équation aux différentielles totales*. L'intégrale générale de l'équation (1) est $U\,(x, y) = C$. On détermine la fonction $U\,(x, y)$ par la méthode indiquée au chapitre

VI, § 8 ou d'après la formule

$$U=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

(voir chapitre VII, § 9).

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0.$$

Solution. C'est une équation aux différentielles totales puisque $\frac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y}=\frac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x}=12xy$ et, par conséquent, l'équation est de la forme $dU=0$.

Ici

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=6x^2y+4y^3,$$

d'où

$$U=\int(3x^2+6xy^2)\,dx+\varphi(y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y).$$

En dérivant U par rapport à y, on trouve $\frac{\partial U}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=$ $=6x^2y+4y^3$ (par hypothèse), d'où $\varphi'(y)=4y^3$ et $\varphi(y)=y^4+C_0$. On a finalement $U(x, y)=x^3+3x^2y^2+y^4+C_0$, par conséquent, $x^3+3x^2y^2+y^4=C$ est l'intégrale générale cherchée de l'équation.

2°. Facteur intégrant. Si le 1-er membre de l'équation (1) n'est pas une différentielle totale et si les conditions du théorème de Cauchy sont vérifiées, alors il existe une fonction $\mu=\mu(x, y)$ (*facteur intégrant*) telle que

$$\mu(P\,dx+Q\,dy)=dU. \tag{2}$$

D'où on en déduit l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

pour la fonction μ. On trouve facilement le facteur intégrant μ dans deux cas:

1) $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)$, alors $\mu=\mu(x)$.

2) $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F_1(y)$, alors $\mu=\mu(y)$.

Exemple 2. Intégrer l'équation $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+$ $+(x^2+y^2)\,dy=0$.

Solution. Ici, on a $P=2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}$, $Q=x^2+y^2$ et $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1$, par conséquent,

$$\mu=\mu(x).$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ ou $\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{d\mu}{dx}$, alors $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=dx$ et $\ln\mu=x$, $\mu=e^x$.

En multipliant l'équation par $\mu=e^x$, on trouve

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)\,dy=0$$

l'équation aux différentielles totales. En l'intégrant, on trouve l'intégrale générale

$$ye^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=C.$$

Trouver les intégrales générales des équations:

2802. $(x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$

2803. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2xy\,dy=0.$

2804. $(x^3-3xy^2+2)\,dx-(3x^2y-y^2)\,dy=0.$

2805. $x\,dx+y\,dy=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$

2806. $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0.$

2807. Trouver l'intégrale particulière de l'équation

$$\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

qui vérifie la condition initiale $y(0)=2$.

Intégrer les équations admettant un facteur intégrant de la forme $\mu=\mu(x)$ ou $\mu=\mu(y)$:

2808. $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0.$

2809. $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0.$

2810. $\frac{y}{x}\,dx+(y^3-\ln x)\,dy=0.$

2811. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0.$

§ 7. Equations différentielles du premier ordre non résolubles par rapport à la dérivée

1°. Equations différentielles du 1-er ordre de degrés supérieurs. Si l'équation

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

est, par exemple, du second degré par rapport à y', alors en résolvant l'équation (1) par rapport à y', on obtient deux équations:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y). \tag{2}$$

Ainsi, par chaque point $M_0(x_0, y_0)$ d'un domaine du plan il passe en général deux courbes intégrales. L'intégrale de l'équation (1) dans ce cas est en général de la forme

$$\Phi(x, y, C) \equiv \Phi_1(x, y, C)\,\Phi_2(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont deux intégrales générales de l'équation (2).

De plus, pour l'équation (1), il peut exister une *intégrale singulière*. Géométriquement, la solution singulière est l'enveloppe de la famille de courbes (3) et qui peut être obtenue en éliminant C du système d'équations

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_C(x, y, C) = 0, \tag{4}$$

ou après l'élimination de $p = y'$ dans les équations du système

$$F(x, y, p) = 0, \quad F'_p(x, y, p) = 0. \tag{5}$$

Remarquons que les courbes définies par les équations (4) et (5) ne sont pas toujours des solutions de l'équation (1); c'est pourquoi, dans chaque cas séparé, il est nécessaire de le vérifier.

Exemple 1. Trouver la solution générale et singulière de l'équation

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

Solution. En la résolvant par rapport à y', on trouve les deux équations homogènes

$$y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}, \quad y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}}$$

définies dans le domaine

$$x(x + y) > 0$$

dont les intégrales générales sont

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} - 1\right)^2 = \frac{C}{x}, \quad \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1\right)^2 = \frac{C}{x}$$

ou

$$(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0, \quad (2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0.$$

En multipliant, on trouve l'intégrale générale de l'équation donnée

$$(2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0,$$

ou

$$(y - C)^2 = 4Cx$$

(famille de paraboles).

En dérivant l'intégrale générale par rapport à C et en éliminant C, on trouve l'intégrale singulière

$$y + x = 0.$$

(On vérifie que $y + x = 0$ est une solution de l'équation.)

On peut aussi trouver l'intégrale singulière en dérivant $xp^2 + 2xp - y = 0$ par rapport à p puis en éliminant p.

2°. Intégration des équations différentielles en introduisant un paramètre. Si l'équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$x = \varphi(y, y'),$$

les variables x et y peuvent être définies par le système d'équations

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \quad x = \varphi(y, p),$$

où $p = y'$ joue le rôle d'un paramètre.

De même, si $y = \psi(x, y')$, alors x et y sont déterminés par le système d'équations

$$p = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \quad y = \psi(x, p).$$

Exemple 2. Trouver les intégrales générale et singulière de l'équation

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Solution. En faisant la substitution $y' = p$, on peut transcrire l'équation sous la forme

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

En dérivant par rapport à x et en supposant p fonction de x, on a

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x,$$

ou $\frac{dp}{dx}(2p - x) = (2p - x)$ ou $\frac{dp}{dx} = 1$. En intégrant on trouve $p = x + C$. Par substitution dans l'équation initiale, on en déduit la solution générale

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

En dérivant la solution générale par rapport à C et en éliminant C on trouve la solution singulière $y = \frac{x^2}{4}$. (On vérifie que $y = \frac{x^2}{4}$ est une solution de l'équation donnée.)

Si on annule le facteur $2p - x$ par lequel on a simplifié, on trouve $p = \frac{x}{2}$ et, en substituant p dans l'équation donnée, on a $y = \frac{x^2}{4}$, c'est-à-dire la même solution singulière.

Trouver les intégrales générale et singulière des équations: (Construire le champ des courbes intégrales pour les exercices nos 2812-2813.)

2812. $y'^2 - \frac{2y}{x} y' + 1 = 0.$

2813. $4y'^2 - 9x = 0.$

2814. $yy'^2 - (xy + 1) y' + x = 0.$

2815. $yy'^2 - 2xy' + y = 0.$

2816. Trouver les courbes intégrales de l'équation $y'^2 + y^2 = 1$ passant par le point $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Intégrer les équations en introduisant un paramètre:

2817. $x = \sin y' + \ln y'.$

2818. $y = y'^2 e^{y'}.$

2819. $y = y'^2 + 2 \ln y'.$

2820. $4y = x^2 + y'^2.$

2821. $e^x = \frac{y^2 + y'^2}{2y'}.$

§ 8. Equations de Lagrange et de Clairaut

1°. Equation de Lagrange. Une équation de la forme

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{1}$$

où $p = y'$, s'appelle *équation de Lagrange*. En dérivant et en prenant compte que $dy = p\,dx$ l'équation (1) devient linéaire par rapport à x

$$p\,dx = \varphi(p)\,dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp. \tag{2}$$

Si $p \not\equiv \varphi(p)$, alors des équations (1) et (2) on déduit la solution générale sous forme paramétrique

$$x = Cf(p) + g(p), \quad y = [Cf(p) + g(p)]\,\varphi(p) + \psi(p),$$

où p est un paramètre et $f(p)$, $g(p)$ sont des fonctions connues. En outre, il peut exister une solution singulière que l'on peut trouver par la méthode ordinaire.

2°. Equation de Clairaut. Si dans l'équation (1) $p \equiv \varphi(p)$, on a affaire à l'*équation de Clairaut*

$$y = xp + \psi(p).$$

Sa solution générale est de la forme $y = Cx + \psi(C)$ (famille de droites). En outre, il existe une solution singulière (enveloppe) obtenue en éliminant le paramètre p entre les équations du système

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p). \end{cases}$$

Exemple. Intégrer l'équation

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}. \tag{3}$$

Solution. Posons $y' = p$, alors $y = 2px + \frac{1}{p}$; en différentiant et en remplaçant dy par $p\,dx$, on a

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp - \frac{dp}{p^2},$$

ou

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}.$$

On a en intégrant cette équation linéaire

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C).$$

Par conséquent, l'intégrale générale est

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C), \\ y = 2px + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Pour déterminer l'intégrale singulière d'après la règle générale formons le système

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \quad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}.$$

D'où

$$x = \frac{1}{2p^2}, \quad y = \frac{2}{p}$$

et, par conséquent,

$$y = \pm 2\sqrt{2x}.$$

En substituant y dans l'équation (3), on peut se convaincre que la fonction obtenue n'est pas solution et que, par conséquent, l'équation (3) n'a pas d'intégrale singulière.

Intégrer les équations de Lagrange:

2822. $y=\frac{1}{2}x\left(y'+\frac{y}{y'}\right)$. 2824. $y=(1+y')x+y'^2$.

2823. $y=y'+\sqrt{1-y'^2}$. 2825*. $y=-\frac{1}{2}y'(2x+y')$.

Trouver les intégrales générale et singulière des équations de Clairaut et construire le champ des courbes intégrales:

2826. $y=xy'+y'^2$. 2828. $y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$.

2827. $y=xy'+y'$. 2829. $y=xy'+\frac{1}{y'}$.

2830. Déterminer la courbe dont l'aire du triangle formé par la tangente en un point quelconque et les axes de coordonnées est constante.

2831. Déterminer la courbe dont la distance d'un point donné à une tangente quelconque à cette courbe est constante.

2832. Déterminer la courbe dont le segment d'une de ses tangentes quelconques compris entre les axes des coordonnées a une longueur constante l.

§ 9. Exercices mixtes sur les équations différentielles du premier ordre

2833. Déterminer le type des équations différentielles et indiquer les méthodes qui permettent de les intégrer:

a) $(x+y)y'=x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

b) $(x-y)y'=y^2$;

c) $y'=2xy+x^3$;

d) $y'=2xy+y^3$;

e) $xy'+y=\sin y$;

f) $(y-xy')^2=y'^3$;

g) $y=xe^{y'}$;

h) $(y'-2xy)\sqrt{y}=x^3$;

i) $y'=(x+y)^2$;

j) $x\cos y'+y\sin y'=1$;

k) $(x^2-xy)y'=y^4$;

l) $(x^2+2xy^3)\,dx+$
$+(y^2+3x^2y^2)\,dy=0$;

m) $(x^3-3xy)\,dx+$
$+(x^2+3)\,dy=0$;

n) $(xy^3+\ln x)\,dx=y^2\,dy$.

Intégrer les équations:

2834. a) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$;

b) $x\ln\frac{x}{y}\,dy-y\,dx=0$.

2835. $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy.$

2836. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0.$

2837. $xy' + y = xy^2 \ln x.$

2838. $y = xy' + y' \ln y'.$

2839. $y = y' + \sqrt{-ay'}.$

2840. $x^2 (y+1)\,dx + (x^3 - 1)(y - 1)\,dy = 0.$

2841. $(1 + y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1 + y)\,dy = 0.$

2842. $y' - y\,\frac{2x-1}{x^2} = 1.$

2843. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)\,y'.$

2844. $y' + y \cos x = \sin x \cos x.$

2845. $(1 - x^2)\,y' + xy = a.$

2846. $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0.$

2847. $y'(x \cos y + a \sin 2y) = 1.$

2848. $(x^2y - x^2 + y - 1)\,dx + (xy + 2x - 3y - 6)\,dy = 0.$

2849. $y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x}\right)^2.$

2850. $xy^3\,dx = (x^2y + 2)\,dy.$

2851. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}.$

2852. $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx = 0.$

2853. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

2854. $yy' + y^2 = \cos x.$

2855. $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx.$

2856. $y'(x + \sin y) = 1.$

2857. $y\,\frac{dp}{dy} = -p + p^2.$

2858. $x^3\,dx - (x^4 + y^3)\,dy = 0.$

2859. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$

2860. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0.$

2861. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$

2862. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$

2863. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x).$

2864. $(2e^x + y^4)\,dy - ye^x\,dx = 0.$

2865. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

2866. $xy(xy^2+1)\,dy - dx = 0$.

2867. $a(xy'+2y) = xyy'$.

2868. $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx$.

2869. $(x^2-1)^{3/2}\,dy + (x^3 + 3xy\sqrt{x^2-1})\,dx = 0$.

2870. $\operatorname{tg} x\,\frac{dy}{dx} - y = a$.

2871. $\sqrt{a^2+x^2}\,dy + (x+y-\sqrt{a^2+x^2})\,dx = 0$.

2872. $xyy'^2 - (x^2+y^2)\,y' + xy = 0$.

2873. $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$.

2874. $(3x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-3y^2)\,dy = 0$.

2875. $2yp\,\frac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2$.

Trouver les solutions des équations qui vérifient les conditions initiales indiquées:

2876. $y' = \frac{y+1}{x}$, $y=0$ pour $x=1$.

2877. $e^{x-y}y' = 1$, $y = 1$ pour $x = 1$.

2878. $\operatorname{ctg} xy' + y = 2$, $y = 2$ pour $x = 0$.

2879. $e^y(y'+1) = 1$, $y = 0$ pour $x = 0$.

2880. $y' + y = \cos x$, $y = \frac{1}{2}$ pour $x = 0$.

2881. $y' - 2y = -x^2$, $y = \frac{1}{4}$ pour $x = 0$.

2882. $y' + y = 2x$, $y = -1$ pour $x = 0$.

2883. $xy' = y$; a) $y = 1$ pour $x = 1$; b) $y = 0$ pour $x = 0$.

2884. $2xy' = y$; a) $y = 1$ pour $x = 1$; b) $y = 0$ pour $x = 0$.

2885. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$; a) $y = 0$ pour $x = 0$; b) $y = 1$ pour $x = 0$; c) $y = 0$ pour $x = 1$.

2886. Déterminer la courbe qui passe par le point (0, 1) et dont la sous-tangente est égale à la somme des coordonnées du point de tangence.

2887. Déterminer une courbe dont la somme des segments découpés par sa tangente sur les axes des coordonnées est constante et égale à $2a$.

2888. La somme des longueurs de la normale et de la sous-normale est égale à un. Trouver l'équation de la courbe si on sait qu'elle passe par l'origine des coordonnées.

2889*. Déterminer la courbe dont l'angle formé par la tangente et le rayon vecteur au point de tangence est constant.

2890. Déterminer une courbe sachant que l'aire comprise entre les axes de coordonnées, cette courbe et l'ordonnée d'un de ses points arbitraires est égale au cube de cette ordonnée.

2891. Déterminer une courbe sachant que l'aire du secteur limité par l'axe polaire, cette courbe et le rayon vecteur en un point quelconque de la courbe est proportionnelle au cube du rayon vecteur.

2892. Déterminer la courbe dont le segment de l'axe OX limité par la tangente et l'origine des coordonnées est égal à la longueur de cette tangente.

2893. Déterminer la courbe dont le segment de la tangente compris entre les axes de coordonnées est partagé en deux parties égales par la parabole $y^2 = 2x$.

2894. Déterminer la courbe dont la normale en un point quelconque est égale à la distance de ce point à l'origine des coordonnées.

2895*. L'aire d'une figure limitée par une courbe, les axes de coordonnées et l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe est égale à la longueur correspondante de l'arc de cette courbe. Trouver l'équation de cette courbe, si on sait qu'elle passe par le point (0, 1).

2896. Déterminer la courbe dont l'aire du triangle formé par l'axe des abscisses, la tangente et le rayon vecteur du point de tangence est constante et égale à a^2.

2897. Déterminer une courbe si on sait que le milieu du segment de l'axe OX limité par la tangente et la normale à la courbe est le point constant $(a, 0)$.

Quand on compose des équations différentielles du premier ordre, en particulier dans les problèmes de physique, il est souvent utile d'avoir recours à la *méthode des différentielles*, qui consiste en ce que les relations approchées entre les accroissements infiniment petits des grandeurs à déterminer, qui sont vraies aux infiniment petits d'ordre supérieur près, sont remplacées par des relations correspondantes entre leurs différentielles, ce qui n'influe pas sur le résultat.

Problème. On a dans un réservoir une solution de 100 litres d'eau contenant 10 kg de sel. L'eau se déverse dans le réservoir avec une vitesse de 3 litres à la minute et le mélange en sort à la vitesse de

2 litres à la minute. En outre, on conserve une concentration uniforme par voie de mélange. Déterminer la quantité de sel que contiendra le réservoir au bout d'une heure.

Solution. On appelle concentration c d'une substance donnée la quantité de cette substance contenue dans l'unité de volume. Si la concentration est uniforme, alors la quantité de substance contenue dans le volume V est cV.

Soit x kg la quantité de sel contenu dans le réservoir après t mn. La quantité de mélange dans le réservoir à cet instant est $100 + t$ et, par conséquent, la concentration est $c = \frac{x}{100+t}$ kg par un litre.

Pendant l'intervalle de temps dt, le réservoir se vide de $2dt$ litres de mélange contenant $2c\,dt$ kg de sel. Donc la variation dx de la quantité de sel dans le réservoir est caractérisée par la relation

$$-dx = 2c\,dt = \frac{2x}{100+t}\,dt.$$

C'est l'équation différentielle cherchée. En séparant les variables et en intégrant on trouve

$$\ln x = -2 \ln (100 + t) + \ln C,$$

ou

$$x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

La constante C est déterminée par la condition que pour $t = 0$, $x = 10$, c'est-à-dire $C = 100\,000$. Une heure après, le réservoir contiendra

$$x = \frac{100\,000}{160^2} \approx 3{,}9 \text{ kg}.$$

2898*. Démontrer que pour un fluide pesant en rotation autour d'un axe vertical la surface libre a la forme d'un paraboloïde de révolution.

2899*. Trouver la relation qui existe entre la pression de l'air et l'altitude si on sait que cette pression est égale à 1 kg par cm² au niveau de la mer et à 0,92 kg par cm² à 500 m d'altitude.

2900*. On sait que d'après la loi de Hooke un cordon élastique de longueur l s'allonge de klF (k = const) lorsqu'il est soumis à une tension F. De combien s'allongerait le cordon sous l'action de son poids W si on le pend par l'une de ses extrémités? (La longueur initiale du cordon est l.)

2901. Résoudre le même exercice que précédemment, mais avec la condition qu'à l'extrémité du cordon on fixe une charge P.

On demande d'utiliser la loi de Newton pour résoudre les exercices nos 2902 et 2903 d'après laquelle la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence des températures du corps et du milieu qui l'environne.

2902. Déterminer la relation qui existe entre la température T et le temps t, si un corps chauffé à T_0 degrés est placé dans une chambre dont la température est constante et égale à a degrés.

2903. En combien de temps la température d'un corps chauffé à 100° baissera jusqu'à 30° si la température de la chambre est égale à 20° et si pendant les 20 premières minutes le corps se refroidit jusqu'à 60°?

2904. Le freinage dû au frottement d'un disque en rotation dans un liquide est proportionnel à la vitesse angulaire. Trouver la relation qui existe entre la vitesse angulaire et le temps, sachant que le disque a commencé son mouvement de rotation à la vitesse de 100 t/mn et qu'une minute après sa vitesse était de 60 tours à la minute.

2905*. La vitesse de désintégration du radium est proportionnelle à sa quantité initiale. On sait qu'après 1600 ans il ne reste que la moitié de la quantité initiale. Trouver le pourcentage de radium désintégré 100 ans après.

2906*. La vitesse d'écoulement de l'eau à travers une ouverture se trouvant suivant la verticale à la distance h de la surface libre est donnée par la formule

$$v = c\sqrt{2gh},$$

où $c \approx 0{,}6$ et g est l'accélération de la force de pesanteur.

Dans combien de temps une chaudière demi-sphérique pleine d'eau de 2 m de diamètre se videra complètement par une ouverture circulaire de rayon 0,1 m pratiquée dans le fond de la chaudière?

2907*. La quantité de lumière absorbée par une fine couche d'eau est proportionnelle à la quantité de lumière incidente et à l'épaisseur de la couche. On sait que si la couche d'eau a 3 m d'épaisseur, l'eau absorbe la moitié de la quantité de lumière initiale; quelle est la quantité de lumière qui atteigne la profondeur de 30 mètres?

2908*. La résistance de l'air exercée sur un corps tombant en parachute est proportionnelle au carré de la vitesse du mouvement. Trouver la vitesse limite de chute.

2909*. Le fond d'un réservoir de 300 litres de capacité est recouvert d'un mélange de sel et d'une substance insoluble. En supposant que la vitesse de dissolution du sel soit proportionnelle à la différence entre la concentration à l'instant donné et la concentration de la solution saturée (1 kg de sel pour 3 litres d'eau), et que la quantité d'eau

pure donnée dissout 1/3 kg de sel en une minute, déterminer la quantité de sel que contient la solution une heure après.

2910*. La force électromotrice e d'un circuit parcouru par un courant d'intensité i, de résistance R et d'auto-induction L est constituée par la perte de tension Ri et la force électromotrice d'auto-induction $L\frac{di}{dt}$. Déterminer l'intensité de courant i à l'instant t, si $e = E \sin \omega t$ (E et ω sont des constantes) et $i = 0$ pour $t = 0$.

§ 10. Equations différentielles d'ordres supérieurs

1°. Cas où l'intégration est immédiate. Si

$$y^{(n)} = f(x),$$

alors

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int}_{n \text{ fois}} f(x)\,dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

2°. Cas où on peut abaisser l'ordre. 1) Si une équation différentielle ne contient pas y explicitement, par exemple

$$F(x, y', y'') = 0,$$

alors, en posant $y' = p$, on a une équation dont l'ordre est d'une unité inférieure

$$F(x, p, p') = 0.$$

Exemple 1. Trouver la solution particulière de l'équation

$$xy'' + y' + x = 0$$

vérifiant les conditions

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

Solution. En posant $y' = p$, on a $y'' = p'$, d'où

$$xp' + p + x = 0.$$

En intégrant cette dernière équation comme une équation linéaire par rapport à p, on trouve

$$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

D'après la condition $y' = p = 0$ pour $x = 0$ on a $0 = C_1 - 0$, c'est-à-dire $C_1 = 0$. Par conséquent,

$$p = -\frac{x}{2},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

d'où, en intégrant encore une fois,

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

En faisant $y = 0$ pour $x = 0$ on trouve $C_2 = 0$. Par conséquent, la solution particulière cherchée est

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

2) Si l'équation différentielle ne contient pas x explicitement, par exemple,

$$F(y, y', y'') = 0,$$

alors, en posant $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, on se ramène à une équation dont l'ordre est d'une unité inférieure

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Exemple 2. Trouver la solution particulière de l'équation

$$yy'' - y'^2 = y^4$$

avec les conditions $y = 1$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

Solution. Posons $y' = p$, alors $y'' = p\frac{dp}{dy}$ et notre équation se transforme en l'équation

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4.$$

Nous sommes ramenés à une équation du type Bernoulli par rapport à p (y) étant considéré comme la variable indépendante). En intégrant, on trouve

$$p = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}.$$

De la condition $y' = p = 0$ pour $y = 1$ on a $C_1 = -1$. Par conséquent,

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

On a en intégrant

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

En posant $y = 1$ et $x = 0$ on trouve $C_2 = 0$ d'où $\frac{1}{y} = \cos x$ ou $y = \sec x$.

Intégrer les équations :

2911. $y'' = \frac{1}{x}$.

2912. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$.

2913. $y'' = 1 - y'^2$.

2914. $xy'' + y' = 0$.

2915. $yy'' = y'^2$.

2916. $yy'' + y'^2 = 0$.

2917. $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$.

2918. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

2919. $x^2y'' + xy' = 1$.

2920. $yy'' = y^2y' + y'^2$.

2921. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

2922. $y'' = -\frac{x}{y'}$.

2923. $(x+1) y'' - (x+2) y' + x + 2 = 0$.

2924. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

2925. $y' + \frac{1}{4} y''^2 = xy''$.

2926. $xy''' + y'' = 1 + x$.

2927. $y'''^2 + y''^2 = 1$.

Trouver les solutions particulières correspondant aux conditions initiales données :

2928. $(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0$, $y = 0$, $y' = 3$ pour $x=0$.

2929. $1 + y'^2 = 2yy''$, $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 1$.

2930. $yy'' + y'^2 = y'^3$, $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

2931. $xy'' = y'$, $y = 0$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

Trouver les intégrales générales des équations :

2932. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}\, y'' - y'y''$.

2933. $yy'' = y'^2 + y' \sqrt{y^2 + y'^2}$.

2934. $y'^2 - yy'' = y^2y'$.

2935. $yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$.

Trouver les solutions qui vérifient les conditions données :

2936. $y''y^3 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = \frac{1}{2}$.

2937. $yy'' + y'^2 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

2938. $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; $y = 0$ pour $x = 1$; $y = 1$ pour $x = e^2$.

2939. $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \cdot y' = 2 + \ln x$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ pour $x = 1$.

2940. $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ pour $x = 1$.

2941. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$; $y = 2$, $y' = 2$ pour $x = 0$.

2942. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$; $y = -2$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

2943. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

2944. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$; $y = 1$ pour $x = 0$ et $y = 0$ pour $x = -1$.

2945. $2y' + (y'^2 - 6x) \cdot y'' = 0$; $y = 0$, $y' = 2$ pour $x = 2$.

2946. $y'y^2 + yy'' - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 2$ pour $x = 0$.

2947. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; $y = 1$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

2948. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

2949. $y'' = y'^2 - y$; $y = -\frac{1}{4}$, $y' = \frac{1}{2}$ pour $x = 1$.

2950. $y'' + \frac{1}{y^2} e^{y^2} y' - 2yy'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = e$ pour $x = -\frac{1}{2e}$.

2951. $1 + yy'' + y'^2 = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ pour $x = 1$.

2952. $(1 + yy')\, y'' = (1 + y'^2)\, y'$; $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

2953. $(x + 1)\, y'' + xy'^2 = y'$; $y = -2$, $y' = 4$ pour $x = 1$.

Intégrer les équations:

2954. $y' = xy''^2 + y''^2$.

2955. $y' = xy'' + y'' - y''^2$.

2956. $y'''^2 = 4y''$.

2957. $yy'y'' = y'^3 + y''^2$. Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (0, 0) et qui est tangente à la droite $y + x = 0$.

2958. Déterminer les courbes dont le rayon de courbure est constant.

2959. Déterminer la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale.

2960. Déterminer la courbe dont le rayon de courbure est égal à la normale.

2961. Déterminer la courbe dont le rayon de courbure est deux fois plus grand que la normale.

2962. Déterminer les courbes dont la projection du rayon de courbure sur l'axe OY est constante.

2963. Former l'équation du câble d'un pont suspendu en supposant que la charge est répartie uniformément suivant la projection du câble sur une droite horizontale. On néglige le poids du câble.

2964*. Déterminer la position d'équilibre d'un câble flexible inextensible fixé par ses extrémités et de charge constante q (y compris le poids du câble) par unité de longueur.

2965*. Un corps pesant glisse sans vitesse initiale sur un plan incliné. Trouver la loi du mouvement si l'angle du plan avec une horizontale est α et le coefficient de frottement μ.

(Indication. La force de frottement est égale à μN, où N est la réaction du plan.)

2966*. La résistance de l'air exercée sur un corps en chute peut être considérée comme proportionnelle au carré de la vitesse. Trouver la loi du mouvement si la vitesse initiale est nulle.

2967*. Un hors-bord de 300 kg se déplace en ligne droite avec une vitesse initiale de 66 m/s. La résistance de l'eau est proportionnelle à la vitesse et est de 10 kg pour une vitesse de 1 mètre seconde. Dans combien de temps la vitesse sera de 8 m/s?

§ 11. Equations différentielles linéaires

1°. Equations homogènes. On dit que les fonctions $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ sont *linéairement dépendantes* s'il existe des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ non toutes nulles telles que

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \equiv 0;$$

dans le cas contraire, ces fonctions sont dites *linéairement indépendantes.*

La solution générale de l'équation différentielle *linéaire homogène*

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

à coefficients $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ continus est de la forme

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1) (*système fondamental de solution*).

2°. Equations non homogènes. La solution générale d'une équation différentielle *linéaire non homogène*

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = f(x) \qquad (2)$$

à coefficients $P_i(x)$ continus et à second membre $f(x)$ est de la forme

$$y = y_0 + Y,$$

où y_0 est la solution générale de l'équation homogène (1) correspondante et Y une solution particulière de l'équation non homogène (2) donnée.

Si on connaît un système fondamental de solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation homogène (1), la solution générale de l'équation non homogène (2) correspondante peut être cherchée sous la forme

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n,$$

où les fonctions $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont définies par le système d'équations

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \ldots + C_n'(x)\,y_1 = 0, \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \ldots + C_n'(x)\,y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \quad (3)$$

(*méthode de la variation des constantes arbitraires*).

E x e m p l e. Intégrer l'équation

$$xy'' + y' = x^2. \quad (4)$$

S o l u t i o n. En intégrant l'équation homogène

$$xy'' + y' = 0$$

on trouve

$$y = C_1 \ln x + C_2. \quad (5)$$

Par conséquent, on peut prendre

$$y_1 = \ln x \quad \text{et} \quad y_2 = 1$$

et chercher la solution de l'équation (4) sous la forme

$$y = C_1(x) \ln x + C_2(x).$$

En formant le système (3) et tenant compte de ce que l'équation (4) peut être mise sous la forme $y'' + \frac{y'}{x} = x$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x) \ln x + C_2'(x)\,1 = 0, \\ C_1'(x)\,\frac{1}{x} + C_2'(x)\,0 = x. \end{array}\right.$$

D'où

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad \text{et} \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{x^3}{9} + A \ln x + B,$$

où A et B sont des constantes arbitraires.

2968. Dire si les systèmes suivants de fonctions sont linéairement dépendants:

a) $x,\ x + 1$;
b) $x^2,\ -2x^2$;
c) $0,\ 1,\ x$;
d) $x,\ x + 1,\ x + 2$;
e) $x,\ x^2,\ x^3$;
f) $e\ ,\ e^{2x},\ e^{3x}$;
g) $\sin x,\ \cos x,\ 1$;
h) $\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1$.

2969. Former l'équation différentielle linéaire homogène connaissant son système fondamental de solutions:

a) $y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x$;
b) $y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x$;
c) $y_1 = x, \quad y_2 = x^2$;
d) $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x \sin x, \quad y_3 = e^x \cos x$.

2970. Connaissant le système fondamental de solutions

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3$$

d'une équation différentielle linéaire homogène trouver la solution particulière y vérifiant les conditions initiales:

$$y\,|_{x=1} = 0, \quad y'\,|_{x=1} = -1, \quad y''\,|_{x=1} = 2.$$

2971*. Intégrer l'équation

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$$

si $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ est une solution particulière.

2972. Intégrer l'équation

$$x^2 (\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0$$

si $y_1 = x$ est une solution particulière.

Intégrer par la méthode de la variation des constantes arbitraires les équations linéaires non homogènes:

2973. $x^2y'' - xy' = 3x^3$.
2974*. $x^2y'' + xy' - y = x^2$.
2975. $y''' + y' = \sec x$.

§ 12. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1°. Equation homogène. L'équation linéaire du second ordre à coefficients constants p et q, sans second membre, est de la forme

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Si k_1 et k_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0, \tag{2}$$

alors la solution générale de l'équation (1) peut se mettre sous l'une des trois formes suivantes:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, si k_1 et k_2 sont réels et $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, si $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, si $k_1 = \alpha + \beta i$ et $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

2°. Equation non homogène. La solution générale de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

peut se mettre sous forme de la somme

$$y = y_0 + Y,$$

où y_0 est la solution générale correspondant à l'équation (1) sans second membre donné par les formules 1) — 3) et Y une solution particulière de l'équation (3).

La fonction Y peut être trouvée par la *méthode des coefficients indéterminés* dans les cas simples suivants: 1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

Si a n'est pas racine de l'équation caractéristique (2), c'est-à-dire $\varphi(a) \neq 0$, on pose $Y = e^{ax} Q_n(x)$, où $Q_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients indéterminés.

Si a est racine de l'équation caractéristique (2), c'est-à-dire $\varphi(a) = 0$, on pose $Y = x^r e^{ax} Q_n(x)$, où r est l'ordre de la racine a ($r = 1$ ou $r = 2$).

2. $f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$.

Si $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, on pose

$$Y = e^{ax}[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx],$$

où $S_N(x)$ et $T_N(x)$ sont des polynômes de degré $N = \max\{n, m\}$.

Si $\varphi(a \pm bi) = 0$, alors

$$Y = x^r e^{ax}[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx],$$

où r est l'ordre de la racine $a \pm bi$ (pour les équations du second ordre $r = 1$).

Dans le cas général, pour intégrer l'équation (3) on applique la *méthode de la variation des constantes arbitraires* (voir § 11).

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}.$$

Solution. L'équation caractéristique est $2k^2 - k - 1 = 0$. Elle a pour racine $k_1 = 1$ et $k_2 = -\frac{1}{2}$. La solution générale de l'équation homogène correspondante (cas 1) est $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$. Le second membre de l'équation donnée est $f(x) = 4xe^{2x} = e^{ax} P_n(x)$. Donc, $Y = e^{2x}(Ax + B)$, puisque $n = 1$ et $r = 0$. En dérivant Y deux

fois et en substituant les dérivées dans l'équation donnée, on a

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+2B+A)-$$
$$-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x}.$$

En simplifiant par e^{2x} et en égalisant les coefficients des mêmes puissances de x et les termes constants du premier et du second membre de l'égalité on trouve $5A=4$ et $7A+5B=0$, d'où $A=\frac{4}{5}$ et $B=-\frac{28}{25}$.

Ainsi, $Y=e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)$ et la solution générale de l'équation donnée est

$$y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}+e^{2x}\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right).$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y''-2y'+y=xe^x.$$

Solution. L'équation caractéristique est $k^2-2k+1=0$; elle a une racine double $k=1$. Le second membre de l'équation est de la forme $f(x)=xe^x$, ici $a=1$ et $n=1$. La solution particulière est $Y=x^2e^x(Ax+B)$ puisque a coïncide avec la racine double $k=1$ et donc $r=2$.

En dérivant Y deux fois, puis en substituant dans l'équation et en égalisant les coefficients, on trouve $A=\frac{1}{6}$, $B=0$. Donc, la solution générale de l'équation donnée est de la forme

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Exemple 3. Trouver la solution générale de l'équation

$$y''+y=x\sin x.$$

Solution. L'équation caractéristique est $k^2+1=0$; elle a pour racines $k_1=i$ et $k_2=-i$. La solution générale de l'équation homogène correspondante est [voir 3), où $\alpha=0$ et $\beta=1$]:

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Le second membre est de la forme

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)(x)\sin bx],$$

où $a=0$, $b=1$, $P_n(x)=0$, $Q_m(x)=x$. La solution particulière correspondante Y est

$$Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

(ici $N=1$, $a=0$, $b=1$, $r=1$).

En dérivant deux fois puis en substituant dans l'équation et en identifiant les coefficients de $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ et $x\sin x$ dans les deux membres de l'égalité, on trouve quatre équations $2A+2D=0$, $4C=0$, $-2B+2C=0$, $-4A=1$ d'où on a $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$,

$C=0$, $D=\frac{1}{4}$. Donc,

$$Y=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x.$$

La solution générale est

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x.$$

3°. Principe de superposition des solutions. Si le second membre de l'équation (3) est la somme de plusieurs fonctions

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),$$

où Y_i ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) sont les solutions correspondant aux équations

$$y''+py'+qy=f_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

alors la somme

$$y=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$$

est la solution de l'équation (3).

Trouver les solutions générales des équations:

2976. $y''-5y'+6y=0$.
2977. $y''-9y=0$.
2978. $y''-y'=0$.
2979. $y''+y=0$.
2980. $y''-2y'+2y=0$.
2981. $y''+4y'+13y=0$.
2982. $y''+2y'+y=0$.
2983. $y''-4y'+2y=0$.
2984. $y''+ky=0$.
2985. $y=y''+y'$.
2986. $\frac{y'-y}{y''}=3$.

Trouver les solutions particulières satisfaisant aux conditions données ci-dessous:

2987. $y''-5y'+4y=0$; $y=5$, $y'=8$ pour $x=0$.
2988. $y''+3y'+2y=0$; $y=1$, $y'=-1$ pour $x=0$.
2989. $y''+4y=0$; $y=0$, $y'=2$ pour $x=0$.
2990. $y''+2y'=0$; $y=1$, $y'=0$ pour $x=0$.
2991. $y''=\frac{y}{a^2}$; $y=a$, $y'=0$ pour $x=0$.
2992. $y''+3y'=0$; $y=0$ pour $x=0$ et $y=0$ pour $x=3$.
2993. $y''+\pi^2y=0$; $y=0$ pour $x=0$ et $y=0$ pour $x=1$.
2994. Indiquer la forme des solutions particulières des équations non homogènes données ci-dessous:

a) $y''-4y=x^2e^{2x}$;
b) $y''+9y=\cos 2x$;

c) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;
d) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$;
e) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)\, e^x + xe^{2x}$;
f) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

Trouver les solutions générales des équations:

2995. $y''-4y'+4y=x^2$.
2996. $y''-y'+y=x^3+6$.
2997. $y''+2y'+y=e^{2x}$.
2998. $y''-8y'+7y=14$.
2999. $y''-y=e^x$.
3000. $y''+y=\cos x$.
3001. $y''+y'-2y=8 \sin 2x$.
3002. $y''+y'-6y=xe^{2x}$.
3003. $y''-2y'+y=\sin x+\operatorname{sh} x$.
3004. $y''+y'=\sin^2 x$.
3005. $y''-2y'+5y=e^x \cos 2x$.

3006. Trouver la solution de l'équation $y'' + 4y = \sin x$ vérifiant les conditions $y = 1$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

Intégrer les équations:

3007. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=A \sin pt$. Considérer les cas: 1) $p \neq \omega$; 2) $p = \omega$.

3008. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$.
3009. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.
3010. $y'' - 2y' + y = 2e^x$.
3011. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$.
3012. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$.
3013. $y'' + y' = 5x + 2e^x$.
3014. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$.
3015. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}$.
3016. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.
3017. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\frac{x}{2}$.
3018. $y'' - 3y' = x + \cos x$.

3019. Trouver la solution de l'équation $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$ vérifiant les conditions $y = \frac{1}{8}$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

Intégrer les équations:

3020. $y'' - y = 2x \sin x$.
3021. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$.
3022. $y'' + 4y = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 1$.
3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$.
3024. $y'' = xe^x + y$.
3025. $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$.
3026. $y'' - 2y' - 3y = x\,(1 + e^{3x})$.
3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$.

3028. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.
3029. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)\, e^{x}$.
3030*. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x$.
3031. $y'' - 2y = 2xe^{x} (\cos x - \sin x)$.

Intégrer les équations en appliquant la méthode de la variation des constantes:

3032. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3034. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$.

3035. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$.

3036. $y'' = y + \frac{1}{\cos x}$.

3037. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

3038. a) $y'' - y = \operatorname{th} x$;
b) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

3039. Deux charges semblables sont suspendues à l'une des extrémités d'un ressort. Trouver l'équation du mouvement décrit par l'une de ces charges si l'autre se détache du ressort.

Solution. Soit a l'allongement du ressort sous l'action de l'une des charges à l'état de repos et soit m la masse de la charge. Désignons par x la coordonnée de la charge mesurée le long de la verticale à partir de la position d'équilibre en présence d'une charge. Alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

où, il est évident, $k = \frac{mg}{a}$ et, par conséquent, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a} x$. La solution générale est $x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$. Les conditions initiales donnent $x = a$ et $\frac{dx}{dt} = 0$ pour $t = 0$, d'où $C_1 = a$ et $C_2 = 0$, par conséquent,

$$x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t.$$

3040*. La force qui tend un ressort est proportionnelle à l'allongement du ressort et est égale à un kg, quand la longueur augmente d'un centimètre. On pend à l'une des extrémités du ressort un poids de 2 kg. Déterminer la période du mouvement oscillatoire qui agit sur ce poids si on le tire un peu vers le bas puis on le lâche.

3041*. Une charge de poids $P = 4$ kg est suspendue à un ressort qui s'allonge de 1 cm. Trouver la loi du mouvement de la charge si l'extrémité supérieure du ressort accomplit des oscillations harmoniques verticales $y = 2 \sin 30t$ cm et si à l'instant initial la charge se trouvait au repos (on néglige la résistance du milieu).

3042. Un point matériel de masse m est attiré par deux centres par des forces proportionnelles à la distance (de coefficient de proportionnalité k). Trouver la loi de mouvement du point sachant que la distance entre les deux centres est $2b$, qu'à l'instant initial le point se trouvait sur le segment réunissant ces centres à la distance c de son milieu et avait une vitesse nulle.

3043. Une chaîne de 6 m de longueur glisse sans frottement sur son support de manière à ce qu'elle pende. En combien de temps la chaîne entière glissera le long de son support, si le mouvement commence au moment où la chaîne pend de 1 m?

3044*. Un tube long et étroit tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de la verticale perpendiculaire à son axe vertical. Une boule qui se trouve à l'intérieur du tube glisse sans frottement. Trouver la loi du mouvement de la boule par rapport au tube en supposant

a) qu'au moment initial la boule se trouve à la distance a de l'axe de rotation; la vitesse initiale de la boule est nulle;

b) qu'à l'instant initial la boule se trouve sur l'axe de rotation et possède une vitesse initiale v_0.

§ 13. Equations différentielles linéaires d'ordres supérieurs au second à coefficients constants

1°. Equation homogène. Le système fondamental de solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'une équation linéaire homogène à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

est déterminé d après la nature des racines de l'*équation caractéristique*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (2)$$

Ainsi, 1) si k est une racine réelle de l'équation (2) d'ordre m, il lui correspond m solutions linéairement indépendantes de l'équation (1):

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx}, \ \ldots, \ y_m = x^{m-1} e^{kx};$$

2) si $\alpha \pm \beta i$ est un couple de racines complexes de l'équation (2) d'ordre m, il lui correspond $2m$ solutions linéairement indépendantes de l'équation (1):

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2°. Equation non homogène. On cherche la solution particulière de l'équation non homogène

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \qquad (3)$$

d'après la règle du § 12, 2° et 3°.

Trouver les solutions générales des équations:

3045. $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$

3046. $y''' - y' = 0.$

3047. $y''' + y = 0.$

3048. $y^{IV} - 2y'' = 0.$

3049. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

3050. $y^{IV} + 4y = 0.$

3051. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

3052. $y^{IV} + y' = 0.$

3053. $y^{IV} - 2y'' + y = 0.$

3054. $y^{IV} - a^4 y = 0.$

3055. $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0.$

3056. $y^{IV} + a^2 y'' = 0.$

3057. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0.$

3058. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

3059. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}y' + y = 0.$

3060. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x.$

3061. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3.$

3062. $y''' - y = x^3 - 1.$

3063. $y^{IV} + y''' = \cos 4x.$

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$

3065. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

3066. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x.$

3067. Trouver la solution particulière de l'équation

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x$$

qui vérifie aux conditions initiales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

§ 14. Equations d'Euler

L'équation linéaire de la forme

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(ax+b)y + A_n y = f(x),$$

où a, b, A_1, ..., A_{n-1}, A_n sont des constantes, s'appelle *équation d'Euler*.

On introduit la nouvelle variable indépendante t en posant

$$ax + b = e^t.$$

Alors

$$y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y''' = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \text{ etc.},$$

et l'équation d'Euler se transforme en une équation linéaire à coefficients constants.

Exemple 1. Intégrer l'équation $x^2y'' + xy' + y = 1$.

Solution. En posant $x = e^t$, on a

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Par conséquent, l'équation donnée prend la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1,$$

d'où

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1,$$

ou

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + 1.$$

Pour l'équation homogène d'Euler

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} x y' + A_n y = 0 \qquad (2)$$

la solution peut être cherchée sous la forme

$$y = x^k. \qquad (3)$$

En substituant dans (2) $y, y', \ldots, y^{(n)}$ données par (3), on aboutit à une équation caractéristique d'où on peut déterminer l'exposant k.

Si k est une racine réelle de l'équation caractéristique d'ordre m, il lui correspond m solutions linéairement indépendantes

$$y_1 = x^k, \quad y_2 = x^k \cdot \ln x, \quad y_3 = x^k (\ln x)^2, \ldots, y_m = x^k (\ln x)^{m-1}.$$

Si $\alpha \pm \beta i$ est un couple de racines complexes d'ordre m, il lui correspond alors $2m$ solutions linéairement indépendantes

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \quad y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x), \quad y_3 = x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x),$$

$$y_4 = x^\alpha \ln x \cdot \sin(\beta \ln x), \ldots, y_{2m-1} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x),$$

$$y_{2m} = x^\alpha (\ln x)^{m-1} \sin(\beta \ln x).$$

Exemple 2. Intégrer l'équation

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

S o l u t i o n. Posons

$$y = x^k, \quad y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

En substituant dans l'équation donnée et après simplification par x^k on aboutit à l'équation caractéristique

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

En la résolvant, on trouve

$$k_1 = k_2 = 2,$$

par conséquent, la solution générale est

$$y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x.$$

Intégrer les équations:

3068. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0.$

3069. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

3070. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$

3071. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$

3072. $(3x + 2)y'' + 7y' = 0.$

3073. $y'' = \frac{2y}{x^2}.$

3074. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0.$

3075. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x.$

3076. $(1 + x)^2 y'' - 3(1 + x)y' + 4y = (1 + x)^3.$

3077. Trouver une solution particulière de l'équation

$$x^2y'' - xy' + y = 2x$$

vérifiant les conditions initiales $y = 0$, $y' = 1$ pour $x = 1$.

§ 15. Systèmes d'équations différentielles

M é t h o d e d'é l i m i n a t i o n. Pour trouver la solution, par exemple, d'un système normal de deux équations différentielles du 1er ordre, c'est-à-dire d'un système de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \tag{1}$$

résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, dérivons par rapport à x l'une d'entre elles. On a, par exemple,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial z} g. \tag{2}$$

En déterminant z de la première équation du système (1) et en substituant l'expression trouvée

$$z=\varphi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

dans l'équation (2), on aboutit à une équation du deuxième ordre à une fonction inconnue y. En l'intégrant, on trouve

$$y=\psi(x,\ C_1,\ C_2), \tag{4}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. En substituant la fonction (4) dans la formule (3), on détermine la fonction z sans nouvelle intégration. L'ensemble des formules (3) et (4), où y est remplacé par ψ, donne la *solution générale du système* (1).

E x e m p l e. Intégrer le système

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+4z=1+4x \\ \dfrac{dz}{dx}+y-z=\dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

S o l u t i o n. On a en dérivant la première équation par rapport à x

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=4.$$

De la première équation on détermine $z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)$ et alors la seconde nous donne $\frac{dz}{dx}=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$. En substituant z et $\frac{dz}{dx}$ dans l'équation obtenue après dérivation, on aboutit à une équation du deuxième ordre à une inconnue y

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=-6x^2-4x+3.$$

En l'intégrant, on trouve

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x$$

et alors

$$z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{1}{2}x^2.$$

On peut procéder de la même manière dans le cas d un système un grand nombre d'équations.

Intégrer les systèmes :

3078. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$

3079. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z, \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0. \end{cases}$

3080. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$

3081. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

3082. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

3083. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z. \end{cases}$

3084. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$

3085. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - y - z = x, \end{cases}$

$y = 0,\ z = 0$ pour $x = 0$.

3086. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0, \end{cases}$

$x = 0,\ y = 1$ pour $t = 0$.

3087. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$

3088*. a) $\dfrac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$;

b) $\dfrac{dx}{x - y} = \dfrac{dy}{x + y} = \dfrac{dz}{z}$;

c) $\dfrac{dx}{y - z} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{x - y}$,

déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (1, 1, —2).

3089. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x^2}y = \ln x. \end{cases}$

3090. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$

3091.** Un projectile sort d'un canon avec une vitesse initiale v_0 formant un angle α avec l'horizontale. Trouver l'équation du mouvement en tenant compte que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse.

3092*. Un point matériel est attiré par un centre O par une force proportionnelle à la distance. Le mouvement commence au point A distant de a du centre avec une vitesse initiale v_0 perpendiculaire au segment OA. Déterminer la trajectoire.

§ 16. Intégration des équations différentielles à l'aide de séries entières

Si l'intégration d'une équation différentielle n'est pas possible à l'aide des fonctions élémentaires, on peut, dans certains cas, chercher la solution sous forme de série entière

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{1}$$

Les coefficients indéterminés c_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) sont déterminés en substituant la série (1) dans l'équation différentielle et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de $x - x_0$ dans les deux membres de l'identité après substitution.

On peut aussi chercher la solution de l'équation

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

sous forme d'une série de Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \tag{3}$$

où $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ et les autres dérivées $y^{(n)}(x_0)$ ($n = 2, 3, \ldots$) se calculent successivement en dérivant l'équation (2) et en substituant chaque fois x_0 à x.

Exemple 1. Trouver la solution de l'équation

$$y'' - xy = 0$$

si $y = y_0$, $y' = y_0'$ pour $x = 0$.

Solution. Posons

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

d'où, en dérivant, on trouve

$$y'' = 2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \\ + (n+1) n c_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots$$

En substituant y et y'' dans l'équation donnée, on aboutit à l'identité

$$[2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) \times \\ \times n c_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots] - \\ - x[c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots] \equiv 0.$$

En réunissant dans le premier membre de l'égalité que l'on vient d'obtenir les termes des mêmes puissances de x, on a en annulant leurs coefficients

$$c_2=0;\quad 3\cdot 2c_3-c_0=0,\quad c_3=\frac{c_0}{3\cdot 2};\quad 4\cdot 3c_4-c_1=0,$$

$$c_4=\frac{c_1}{4\cdot 3};\quad 5\cdot 4c_5-c_2=0,\quad c_5=\frac{c_2}{5\cdot 4},\ \text{etc.}$$

Soit, en général,

$$c_{3k}=\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)\,3k},\quad c_{3k+1}=\frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k\,(3k+1)},$$

$$c_{3k+2}=0\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Par conséquent,

$$y=c_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3k-1)\,3k}+\cdots\right)+$$

$$+c_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k\,(3k+1)}+\cdots\right),\quad (4)$$

où $c_0 = y_0$ et $c_1 = y_0'$.

A l'aide du critère de D'Alembert, on vérifie facilement que la série (4) converge pour $-\infty < x < +\infty$.

E x e m p l e 2. Trouver la solution de l'équation

$$y' = x + y,\quad y_0 = y\,(0) = 1.$$

S o l u t i o n. Posons

$$y=y_0+y_0'x+\frac{y_0''}{2\,!}\,x^2+\frac{y_0'''}{3\,!}\,x^3+\ldots$$

On a $y_0 = 1$, $y_0' = 0 + 1 = 1$. En dérivant l'équation $y' = x + y$, on trouve successivement $y'' = 1 + y'$, $y_0'' = 1 + 1 = 2$, $y''' = y''$, $y_0''' = 2$, etc. Par conséquent,

$$y=1+x+\frac{2}{2\,!}\,x^2+\frac{2}{3\,!}\,x^3+\ldots$$

Pour l'exemple considéré, la solution que l'on vient de trouver peut être mise sous la forme finale

$$y = 1 + x + 2\,(e^x - 1 - x)\quad\text{ou}\quad y = 2e^x - 1 - x.$$

On procédera de la même manière dans le cas d'équations différentielles d'ordres supérieurs. L étude de la convergence des séries obtenues est en général compliquée et elle ne sera pas obligatoire dans ce paragraphe.

On demande de trouver à l'aide des séries entières les solutions des équations dont les conditions initiales sont indiquées.

Faire l'étude de la convergence des solutions obtenues dans les exemples 3097, 3098, 3099, 3101.

3093. $y' = y + x^2$; $y = -2$ pour $x = 0$.

3094. $y' = 2y + x - 1$; $y = y_0$ pour $x = 1$.

3095. $y' = y^2 + x^3$; $y = \frac{1}{2}$ pour $x = 0$.

3096. $y' = x^2 - y^2$; $y = 0$ pour $x = 0$.

3097. $(1 - x)\, y' = 1 + x - y$; $y = 0$ pour $x = 0$.

3098*. $xy'' + y = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ pour $x = 0$.

3099. $y'' + xy = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

3100*. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

3101*. $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ pour $x = 0$.

3102. $\frac{d^2x}{dt^2} + x \cos t = 0$; $x = a$; $\frac{dx}{dt} = 0$ pour $t = 0$.

§ 17. Problèmes sur la méthode de Fourier

Pour trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire homogène par la méthode de Fourier, on cherche d'abord des solutions particulières d'un type spécial de cette équation dont chacune d'elles est le produit de fonctions dépendant d'une variable. Dans les cas simples, on trouve un ensemble infini de telles solutions u_n ($n = 1, 2 \ldots$) linéairement indépendantes entre elles pour tout ensemble fini et vérifiant les *conditions aux limites données*. La solution u qu'on cherche se met sous forme de série par rapport à ces solutions particulières

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n. \qquad (1)$$

On détermine les coefficients indéterminés C_n à l'aide des *conditions initiales*.

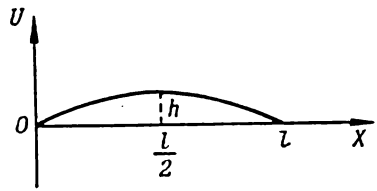


Fig. 107

P r o b l è m e. Le déplacement transversal $u = u(x, t)$ des points d'une corde d'abscisse x à l'instant t satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

où $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ (T_0 est la tension, ρ la densité linéaire de la corde). Déterminer la forme de la corde à l'instant t si ses extrémités $x = 0$ et $x = l$ sont fixées et si à l'instant initial $t = 0$ la corde a la forme d'une parabole d'équation $u = \frac{4h}{l^2}(l - x)\, x$ (fig. 107) et ses points ont une vitesse nulle.

S o l u t i o n. D'après les conditions du problème, on doit déterminer la solution $u = u(x, t)$ de l'équation (2), qui satisfait aux conditions limites

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{3}$$

et aux conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \tag{4}$$

Cherchons des solutions particulières non nulles de l'équation (2) d'un type spécial

$$u = X(x)\, T(t).$$

Substituant cette expression dans l'équation (2) et en séparant les variables on a

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Puisque les variables x et t sont indépendantes, l'égalité (5) n'est possible que dans le cas où la valeur commune de la relation (5) est constante. En désignant par $-\lambda^2$ cette constante on aboutit à deux équations différentielles ordinaires

$$T''(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0 \quad \text{et} \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

En intégrant ces équations, on trouve

$$T(t) = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t,$$
$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x,$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires. Déterminons ces constantes. La condition (3) nous donne: $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$, par conséquent, $C = 0$ et $\sin \lambda l = 0$ (puisque D ne peut s'annuler en même temps que C). Donc, $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, où k est un nombre entier. On vérifie facilement qu'on ne nuit pas à la généralité en prenant pour k seulement les nombres entiers positifs ($k = 1, 2, 3 \ldots$).

A chaque λ_k correspond une solution particulière

$$u_k = \left(A_k \cos \frac{ka\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ka\pi}{l} t\right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

vérifiant les conditions aux limites (3).

Formons la série

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ka\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ka\pi t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

dont la somme, comme il est évident, satisfait à l'équation (2) et aux conditions aux limites (3).

Choisissons les constantes A_k et B_k de manière que la somme de la série vérifie les conditions initiales (4). Puisque

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka\pi}{l}\left(-A_k\sin\frac{ka\pi t}{l}+B_k\cos\frac{ka\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

alors, on a en posant $t=0$

$$u(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}\equiv\frac{4h}{l^2}x(l-x)$$

et

$$\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka\pi}{l}B_k\sin\frac{k\pi x}{l}\equiv 0.$$

Par conséquent, pour déterminer les coefficients A_k et B_k, il faut développer en séries de Fourier, suivant les sinus, la fonction $u(x,\ 0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$ et la fonction $\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}\equiv 0$.

D'après les formules connues (chapitre VIII, § 4, 3°), on a

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{32h}{\pi^3k^3},$$

si k est impair et $A_k=0$ si k est pair;

$$\frac{ka\pi}{l}B_k=\frac{2}{l}\int_0^l 0\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0,\quad B_k=0.$$

La solution cherchée est

$$u=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3103*. A l'instant initial $t=0$ une corde est fixée à ses extrémités $x=0$ et $x=l$, et a la forme de la sinusoïde $u=A\sin\frac{\pi x}{l}$; en outre, la vitesse de ses points est nulle. Déterminer la forme de la corde à l'instant quelconque t.

3104*. A l'instant $t=0$, on communique aux points d'une corde rectiligne $0<x<l$ la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}=1$. Déter-

miner la forme de la corde à l'instant t si ses extrémités $x = 0$ et $x = l$ sont fixées (voir problème 3103).

3105*. Une corde de longueur $l = 100$ cm est fixée par ses extrémités $x = 0$ et $x = l$. A l'instant initial on la tend au point $x = 50$ cm de $h = 2$ cm puis on la lâche sans secousse. Déterminer la forme de la corde à un instant quelconque t.

3106*. Pour une tige rectiligne homogène fine soumise à des oscillations longitudinales et dont l'axe coïncide avec l'axe OX, le déplacement $u = u(x, t)$ de la section transversale de la tige d'abscisse x à l'instant t satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où $a^2 = \frac{E}{\rho}$ (E est le module de Young, ρ la densité de la tige). Déterminer les oscillations longitudinales d'une tige horizontale élastique de longueur $l = 100$ cm fixée à l'extrémité $x = 0$ et tendue à l'extrémité $x = 100$ de $\Delta l = 1$ cm puis lâchée sans secousse.

3107*. Pour une barre rectiligne homogène dont l'axe coïncide avec l'axe OX, la température $u = u(x, t)$ de la section d'abscisse x à l'instant t en l'absence de source de chaleur satisfait à l'équation de la transmission de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où a est une constante. Déterminer la répartition de la température à un instant quelconque t dans une barre de longueur $l = 100$ cm, si on sait que la répartition initiale de la température est

$$u(x, 0) = 0{,}01x(100 - x).$$

CHAPITRE X

CALCUL NUMÉRIQUE

§ 1. Opérations sur des nombres approchés

1°. Erreur absolue. L'*erreur absolue* commise sur un nombre A en le remplaçant par une valeur approchée a est, par définition, la valeur absolue de leur différence. Le nombre Δ qui vérifie l'inégalité

$$|A - a| \leqslant \Delta \tag{1}$$

s'appelle *erreur absolue limite*. Le nombre exact A se trouve entre les bornes $a - \Delta \leqslant A \leqslant a + \Delta$ ou, sous une forme condensée, $A = a \pm \Delta$.

2°. Erreur relative. On appelle *erreur relative* commise sur un nombre exact A ($A \approx 0$) en le remplaçant par le nombre approché a le rapport de l'erreur absolue à la valeur exacte A. Le nombre δ vérifiant l'inégalité

$$\frac{|A-a|}{A} \leqslant \delta \tag{2}$$

s'appelle *erreur relative limite* de la valeur approchée a du nombre A. Ainsi, puisqu'en pratique $A \approx a$, on prend fréquemment le nombre $\delta = \frac{\Delta}{a}$ pour erreur relative limite.

3°. Nombre de décimales exactes. On dit que a est la valeur approchée positive au *sens étroit* d'un nombre avec n *décimales exactes* (chiffres) si l'erreur absolue de ce nombre n'est pas supérieure d'une demi-unité au chiffre se trouvant au n-ième rang. Dans ce cas, pour $n > 1$, on peut prendre le nombre

$$\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

pour erreur relative limite, où k est le premier chiffre significatif de la valeur approchée a. Inversement, si on sait que $\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, alors la valeur approchée a contient n décimales exactes au sens étroit. En particulier, la valeur approchée a contiendra à priori n décimales exactes au sens étroit si $\delta \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$.

Si l'erreur absolue commise sur un nombre en le remplaçant par une valeur approchée a n'est pas supérieure d'une unité au chiffre se trouvant au dernier rang (tels sont les nombres obtenus lors de me-

sures effectuées avec une exactitude correspondante à l'unité requise) on dit que toutes les décimales de cette valeur approchée sont *exactes* au *sens large*. En présence d'un grand nombre de chiffres significatifs dans une valeur approchée, si elle est définitive, on arrondit en général le dernier chiffre significatif de manière que tous les autres chiffres soient exacts soit au sens étroit, soit au sens large.

Dans la suite, nous supposerons que dans l'inscription des données initiales tous les chiffres sont exacts (sauf mention contraire) au sens étroit. En ce qui concerne les résultats intermédiaires des calculs, ils pourront contenir un ou deux chiffres de réserve.

Remarquons que les exemples de ce paragraphe, en règle générale, représentent des résultats définitifs de calculs et c'est pourquoi leurs réponses sont données par des valeurs approchées ne s'exprimant que par des décimales exactes.

4°. Somme et différence de valeurs approchées. L'erreur absolue limite d'une somme algébrique de plusieurs valeurs approchées est égale à la somme des erreurs absolues limites de ses valeurs approchées. Donc, pour avoir dans la somme d'une petite quantité de nombres approchés dont toutes les décimales sont exactes seuls les chiffres exacts (au moins au sens large), il faut se baser sur le terme dont la décomposition décimale s'interrompt avant les autres, tout en conservant pour chaque terme de la somme une décimale de réserve. Puis on ajoutera les nombres obtenus, considérés comme exacts, et on arrondira la somme de son dernier chiffre.

Si on a à additionner des valeurs approchées non arrondies, on doit les arrondir en conservant dans chaque nombre à additionner une ou deux décimales de réserve. Puis on appliquera la règle d'addition indiquée ci-dessus en conservant les décimales superflues respectives de la somme jusqu'à la fin des calculs.

Exemple 1. $215{,}21 + 14{,}182 + 21{,}4 = 215{,}2(1) + 14{,}1(8) + 21{,}4 = 250{,}8$.

L'erreur relative d'une somme de termes positifs est comprise entre la plus petite et la plus grande erreur relative de ces termes.

L'erreur relative de la différence de deux valeurs approchées ne se ramène pas à une règle simple. De ce point de vue la différence de deux valeurs approchées voisines est particulièrement défavorable.

Exemple 2. La différence des valeurs approchées 6,135 et 6,131 avec quatre chiffres exacts est 0,004. L erreur relative limite est $\delta = \dfrac{\frac{1}{2}0{,}001 + \frac{1}{2}0{,}001}{0{,}004} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$; par conséquent, aucun chiffre de la différence n'est exact. Aussi faut-il éviter le plus possible de former la différence de deux valeurs approchées voisines en transformant, quand cela est possible, l'expression donnée de manière que cette opération indésirable ne participe pas dans les calculs.

5°. Multiplication et division des valeurs approchées. L'erreur relative limite du produit et du rapport de valeurs approchées est égale à la somme des erreurs relatives limites de ces valeurs. En partant de cette définition et en appliquant la règle du nombre des chiffres exacts (3°), nous aboutissons à des réponses ne conservant qu'un nombre déterminé de chiffres.

Exemple 3. Le produit des valeurs approchées est $25{,}3 \times 4{,}12 = 104{,}236$.

Supposant que tous les chiffres des facteurs sont exacts, on trouve que l'erreur relative du produit est

$$\delta = \frac{1}{2\cdot 2}\,0{,}01 + \frac{1}{4\cdot 2}\,0{,}01 \approx 0{,}003.$$

D'où le nombre de chiffres exacts du produit est trois et le résultat, s'il doit être définitif, doit être comme suit: $25{,}3\cdot 4{,}12 = 104$ ou, plus exactement, $25{,}3\cdot 4{,}12 = 104{,}2 \pm 0{,}3$.

6°. Élévation à la puissance et extraction de racines des valeurs approchées. L'erreur relative limite de la m-ième puissance d'une valeur approchée a est égale à m fois l'erreur relative limite de la valeur approchée a.

L'erreur relative limite de la racine m-ième d'une valeur approchée a constitue la m-ième partie de l'erreur relative limite de la valeur approchée a.

7°. Calcul de l'erreur en tant que résultat de diverses opérations sur des valeurs approchées. Si $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n$ sont les erreurs absolues limites des valeurs approchées $a_1, \ldots, a_n$, alors l'erreur absolue ΔS du résultat

$$S = f(a_1, \ldots, a_n)$$

peut être évaluée approximativement d'après la formule

$$\Delta S = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

L'erreur relative limite δS est alors

$$\delta S = \frac{\Delta S}{|S|} = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \cdot \frac{\Delta a_1}{|f|} + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \frac{\Delta a_n}{|f|} =$$

$$= \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \ldots + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Exemple 4. Calculer $S = \ln(10{,}3 + \sqrt{4{,}4})$; les valeurs approchées 10,3 et 4,4 ont tous leurs chiffres exacts.

Solution. Calculons d'abord l'erreur absolue limite ΔS sous une forme générale: $S = \ln(a + \sqrt{b})$, $\Delta S = \frac{1}{a+\sqrt{b}}\left(\Delta a + \frac{1}{2}\frac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right)$.

On a $\Delta a = \Delta b \approx \frac{1}{20}$, $\sqrt{4{,}4} = 2{,}0976\ldots$; nous prenons 2,1 puisque l'erreur relative de la valeur approchée de $\sqrt{4{,}4}$ est $\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{40} = \frac{1}{80}$; l'erreur absolue est alors $\approx 2\cdot\frac{1}{80} = \frac{1}{40}$; le calcul est exact à 1/10 près. Par conséquent,

$$\Delta S = \frac{1}{10{,}3+2{,}1}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20\cdot 2{,}1}\right) =$$

$$= \frac{1}{12{,}4\cdot 20}\left(1 + \frac{1}{4{,}2}\right) = \frac{13}{2604} \approx 0{,}005.$$

Par conséquent, les centièmes aussi sont exacts.

Faisons à présent le calcul avec un chiffre de réserve:

$$\lg(10{,}3+\sqrt{4{,}4}) \approx \lg 12{,}4 = 1{,}093,\ \ln(10{,}3+\sqrt{4{,}4}) \approx$$
$$\approx 1{,}093 \cdot 2{,}303 = 2{,}517.$$

La réponse est: 2,52.

8°. Détermination des erreurs admissibles des valeurs approchées lorsqu'on se donne l'erreur du résultat des opérations sur ces valeurs approchées. En appliquant la formule du numéro 7 pour ΔS ou δS donnés en supposant que toutes les différentielles partielles $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \Delta a_k$ ou les grandeurs $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \frac{\Delta a_k}{|f|}$ sont égales, nous calculons les erreurs absolues admissibles $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n, \ldots$ des valeurs approchées $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, participant aux opérations (*principe d'équiinfluence*).

Il est à remarquer que, parfois, dans les calculs des erreurs admissibles les variables d'une fonction il n'est pas du tout avantageux d'avoir recours au principe d'équiinfluence, puisque ce dernier peut exiger des restrictions pratiquement impossibles. Dans ces cas, on recommande de redistribuer raisonnablement les erreurs, si cela est possible, de manière que l'erreur somme ne soit pas supérieure à une grandeur donnée. Ainsi, le problème posé, à strictement parler, est indéterminé.

Exemple 5. Le volume d'un « segment cylindrique », c'est-à-dire le corps solide découpé dans un cylindre circulaire par un plan passant par un diamètre, égal à $2R$, de la base et faisant un angle α avec cette base, se calcule d'après la formule $V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha$. Avec quelle précision faut-il mesurer le rayon $R \approx 60$ cm et l'angle α pour que le volume du segment cylindrique soit calculé à 1 % près?

Solution. Si ΔV, ΔR et $\Delta\alpha$ sont les erreurs absolues limites des grandeurs V, R et α, alors l'erreur relative limite du volume à calculer V est

$$\delta = \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Posons $\frac{3\Delta R}{R} \leqslant \frac{1}{100}$ et $\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{200}$. D'où

$$\Delta R \leqslant \frac{R}{600} \approx \frac{60\text{ cm}}{600} = 1 \text{ mm};$$

$$\Delta\alpha \leqslant \frac{\sin 2\alpha}{400} \leqslant \frac{1}{400} \text{ radian} \approx 9'.$$

Ainsi, nous assurons l'exactitude désirée à 1 % près pour la réponse si nous mesurons le rayon à 1 mm près et l'angle α à 9′ près.

3108. Comme résultat de mesure on a obtenu des valeurs approchées dont tous les chiffres sont exacts au sens large:

a) 12° 07′ 14″; b) 38,5 cm; c) 62,215 kg.

Calculer leurs erreurs absolues et relatives.

3109. Calculer les erreurs absolues et relatives des valeurs approchées dont tous les chiffres sont exacts au sens étroit:
a) 241,7; b) 0,035; c) 3,14.

3110. Déterminer le nombre de chiffres*) exacts et donner leurs valeurs approchées correspondantes:
a) 48 361 à 1 % près; c) 592,8 à 2 % près.
b) 14,9360 à 1 % près;

3111. Additionner les valeurs approchées dont tous les chiffres sont exacts:
a) $25{,}386 + 0{,}49 + 3{,}10 + 0{,}5$; c) $38{,}1 + 2{,}0 + 3{,}124$.
b) $1{,}2 \cdot 10^2 + 41{,}72 + 0{,}09$;

3112. Effectuer la soustraction des valeurs approchées dont tous les chiffres sont exacts:
a) $148{,}1 - 63{,}871$; b) $29{,}72 - 11{,}25$; c) $34{,}22 - 34{,}21$.

3113*. Calculer la différence des aires de deux carrés dont la mesure des côtés a donné 15,28 cm et 15,22 cm (à 0,05 mm près).

3114. Calculer les produits des valeurs approchées dont tous les chiffres sont exacts:
a) $3{,}49 \cdot 8{,}6$; b) $25{,}1 \cdot 1{,}743$; c) $0{,}02 \cdot 16{,}5$.
Indiquer les bornes admissibles des résultats.

3115. Les côtés d'un rectangle sont égaux à 4,02 m et 4,95 m (à 1 cm près). Calculer l'aire du rectangle.

3116. Calculer le rapport des valeurs approchées dont tous les chiffres sont exacts:
a) $5{,}684 : 5{,}032$; b) $0{,}144 : 1{,}2$; c) $216 : 4$.

3117. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont égaux à 12,10 cm et 25,21 cm (à 0,01 cm près). Calculer la tangente de l'angle opposé au premier côté.

3118. Calculer les puissances des valeurs approchées indiquées (les chiffres des valeurs approchées sont exacts):
a) $0{,}4158^2$; b) $65{,}2^3$; c) $1{,}5^2$.

3119. Le côté d'un carré est égal à 45,3 cm (à 1 mm près). Trouver l'aire du carré.

3120. Calculer la valeur des racines (les valeurs approchées sous les radicaux ont tous leurs chiffres exacts):
a) $\sqrt{2{,}715}$; b) $\sqrt[3]{65{,}2}$; c) $\sqrt{81{,}1}$.

3121. Les rayons des bases et la génératrice d'un cône tronqué sont $R = 23{,}64$ cm $\pm$ 0,01 cm, $r = 17{,}31$ cm $\pm$ $\pm$ 0,01 cm, $l = 10{,}21$ cm $\pm$ 0,01 cm; $\pi = 3{,}14$. Calculer

---

*) Les chiffres exacts sont compris au sens étroit.

d'après ces données la surface totale du cône tronqué. Evaluer les erreurs absolue et relative du résultat obtenu.

3122. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à 15,4 cm $\pm$ 0,1 cm et un des côtés de l'angle droit est égal à 6,8 cm $\pm$ 0,1 cm. Avec quelle précision peut-on déterminer la longueur du second côté de l'angle droit et l'angle aigu adjacent? Trouver ces valeurs.

3123. Calculer le poids spécifique de l'aluminium si un cylindre d'aluminium de 2 cm de diamètre et de 11 cm de hauteur pèse 93,4 g. L'erreur relative commise en effectuant les mesures est 0,01 et l'erreur relative commise en pesant est 0,001.

3124. Calculer l'intensité d'un courant si la force électromotrice est de 221 volts $\pm$ 1 volt et la résistance de 809 ohms $\pm$1 ohm.

3125. La période d'oscillation d'un pendule de longueur l est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

où g est l'accélération de la force de pesanteur. Avec quelle précision doit-on effectuer les mesures de la longueur du pendule, dont la période d'oscillation est voisine de 2s, pour déterminer sa période d'oscillation avec une erreur relative de 0,5 %? Avec quelle précision doit-on prendre les nombres π et g?

3126. On veut mesurer à 1 % près la surface latérale d'un cône tronqué dont les rayons de base sont de 2 m et 1 m et la génératrice de 5 m (approximativement). Avec quelle précision faut-il mesurer les rayons, la génératrice et combien de décimales faut-il prendre pour le nombre π?

3127. Pour déterminer le module de Young à la flexion d'une barre de section rectangulaire on applique la formule

$$E = \frac{1}{4}\frac{l^3P}{d^3bs},$$

où l est la longueur de la barre, b et d sont la base et la hauteur de la section transversale de la barre, s la flèche à la flexion, P la charge. Avec quelle précision faut-il mesurer la longueur l et la flèche s pour que l'erreur commise sur E ne soit pas supérieure à 5,5 % avec les conditions: P est connue à 0,1 % près, les grandeurs d et b à 1 % près, $l \approx 50$ cm, $s \approx 2{,}5$ cm?

§ 2. Interpolations des fonctions

1°. Formule d'interpolation de Newton. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des valeurs tabulées d une variable dont les différences $h = \Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots n - 1$) sont constantes (le *pas du tableau*) et soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les valeurs correspondantes de la fonction y. Alors la valeur de la fonction y pour une valeur intermédiaire de la variable x est donnée approximativement par la *formule d'interpolation de Newton*

$$y = y_0 + q \cdot \Delta y + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \tag{1}$$

où $q = \frac{x - x_0}{h}$, et $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \ldots$ sont les différences finies successives de la fonction y. Pour $x = x_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) le polynôme (1) prend respectivement les valeurs tabulées y_i ($i = 0, 1, \ldots, n$). On a comme cas particuliers de la formule de Newton: pour $n = 1$ *interpolation linéaire*; pour $n = 2$ *interpolation quadratique*. Pour plus de commodité, avant d'utiliser la formule de Newton, on recommande de constituer le tableau des différences finies.

Si $y = f(x)$ est un polynôme de degré n, alors

$$\Delta^n y_i = \text{const} \quad \text{et} \quad \Delta^{n+1} y_i = 0$$

et, par conséquent, la formule (1) est exacte.

Dans le cas général si $f(x)$ possède une dérivée d'ordre $n + 1$ continue $f^{(n+1)}(x)$ sur le segment $[a, b]$ contenant les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et x, alors l'erreur commise par la formule (1) est

$$R_n(x) = y - \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\ldots(q-i+1)}{i!} \Delta^i y_0 =$$

$$= h^{n+1} \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{2}$$

où ξ est une certaine valeur intermédiaire comprise entre x_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) et x. En pratique on emploie une formule approchée plus commode

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\ldots(q-n).$$

Si le nombre n peut être pris arbitraire, on doit alors le choisir de manière que la différence $\Delta^{n+1} y_0 \approx 0$ se trouve entre les limites de la précision donnée, en d'autres termes, la différence $\Delta^n y_0$ doit être constante vis-à-vis de l'approximation considérée.

Exemple 1. Calculer sin 26°15′ en ayant recours aux données tabulées de sin 26° = 0,43837, sin 27° = 0,45399, sin 28° — = 0,46947.

S o l u t i o n. Formons le tableau

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26°	0,43837	1562	—14
1	27°	0,45399	1548	
2	28°	0,46947		

Ici $h = 60'$, $q = \frac{26°15' - 26°}{60'} = \frac{1}{4}$.

En appliquant la formule (1) et en utilisant la première ligne horizontale du tableau, on a

$$\sin 26°15' = 0.43837 + \frac{1}{4} 0{,}01562 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2!} \cdot (-0{,}00014) = 0{,}44229.$$

Evaluons l'erreur R_2. En utilisant la formule (2) et en tenant compte que si $y = \sin x$, alors $|y^{(n)}| \leqslant 1$, on a:

$$|R_2| \leqslant \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right)}{3!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 =$$

$$= \frac{7}{128} \cdot \frac{1}{57{,}33^3} \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{-6}.$$

Ainsi, tous les chiffres qu'on a déterminés pour sin 26°15′ sont exacts.

A l'aide de la formule de Newton, on peut également, d'après une valeur intermédiaire donnée de la fonction y, trouver la valeur correspondante de la variable x (*interpolation inverse*). Pour cela, déterminons d'abord la valeur correspondante q par la méthode des approximations successives, en posant:

$$q^{(0)} = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$$

et

$$q^{(i+1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{q^{(i)} q^{(i)} - 1) \ldots (q^{(i)} - n + 1)}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pour q on prend la valeur commune (pour une précision donnée) de deux approximations successives $q^{(m)} = q^{(m+1)}$. D où $x = x_0 + qh$.

Exemple 2. Calculer approximativement à l'aide du tableau

x	$y = \operatorname{sh} x$	Δy	$\Delta^2 y$
2,2	4,457	1,009	0,220
2,4	5,466	1,229	
2,6	6,695		

la racine de l'équation $\operatorname{sh} x = 5$.

Solution. En prenant $y_0 = 4{,}457$ on a

$$q^{(0)} = \frac{5 - 4{,}457}{1{,}009} = \frac{0{,}543}{1{,}009} = 0{,}538;$$

$$q^{(1)} = q^{(0)} + \frac{q^{(0)}(1 - q^{(0)})}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} = 0{,}538 +$$

$$+ \frac{0{,}538 \cdot 0{,}462}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565;$$

$$q^{(2)} = 0{,}538 + \frac{0{,}565 \cdot 0{,}435}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565.$$

Ainsi, on peut prendre

$$x = 2{,}2 + 0{,}565 \cdot 0{,}2 = 2{,}2 + 0{,}113 = 2{,}313.$$

2°. Formule d'interpolation de Lagrange. Dans le cas général le polynôme de degré n qui pour $x = x_i$ admet les valeurs données y_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) est donné par la *formule d'interpolation de Lagrange*

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} y_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} \times$$

$$\times y_k + \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} y_n.$$

3128. On donne le tableau des valeurs des grandeurs x et y

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Constituer le tableau des différences finies de la fonction y.

3129. Former le tableau des différences finies de la fonction $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ pour les valeurs $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$. Vérifier que toutes les différences finies du troisième ordre sont égales.

3130*. En utilisant la constance des différences du quatrième ordre former le tableau des différences de la fonction $y = x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 3x$ pour les valeurs entières de x, comprises dans l'intervalle fermé $1 \leqslant x \leqslant 10$.

3131. On donne le tableau

$$\begin{aligned} \lg 1 &= 0{,}000, \\ \lg 2 &= 0{,}301, \\ \lg 3 &= 0{,}477, \\ \lg 4 &= 0{,}602, \\ \lg 5 &= 0{,}699. \end{aligned}$$

Calculer à l'aide de l'interpolation linéaire les nombres: $\lg 1{,}7$, $\lg 2{,}5$, $\lg 3{,}1$ et $\lg 4{,}6$.

3132. On donne le tableau

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ &= 0{,}1736, & \sin 13^\circ &= 0{,}2250, \\ \sin 11^\circ &= 0{,}1908, & \sin 14^\circ &= 0{,}2419, \\ \sin 12^\circ &= 0{,}2079, & \sin 15^\circ &= 0{,}2588. \end{aligned}$$

Compléter le tableau en calculant avec la formule de Newton (pour $n = 2$) les valeurs des sinus pour $10°30'$, $11°30'$, $12°30'$, $13°30'$ et $14°30'$.

3133. Former le polynôme d'interpolation de Newton pour la fonction donnée par le tableau

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

3134*. Former le polynôme d'interpolation de Newton pour la fonction donnée par le tableau

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

Calculer y pour $x = 5{,}5$. Pour quelle valeur de x $y = 20$?

3135. La fonction est donnée par le tableau

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

Former le polynôme d'interpolation de Lagrange et calculer la valeur de y pour $x = 0$.

3136. On a trouvé expérimentalement le raccourcissement d'un ressort (x mm) en fonction du poids (P kg) suspendu au ressort:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
P	49	105	172	253	352	473	619	793

Déterminer le poids de manière que le raccourcissement du ressort soit de 14 mm.

3137. On donne le tableau des grandeurs x et y

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

Calculer les valeurs de y pour $x = 0{,}5$ et pour $x = 2$: a) par interpolation linéaire; b) d'après la formule de Lagrange.

§ 3. Calcul des racines réelles des équations

1°. Détermination des premières approximations des racines. La détermination approximative des racines d'une équation donnée

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

se fait en deux étapes: 1) *séparation des racines*, c'est-à-dire détermination des intervalles, les plus petits possibles, à l'intérieur desquels se trouve une et seulement une racine de l'équation (1); 2) *calcul des racines* pour un degré de précision donné.

Si la fonction $f(x)$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors le segment $[a, b]$ contient au moins une racine ξ de l'équation (1). Cette racine est à priori unique si $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ pour $a < x < b$.

Pour la détermination approchée de la racine ξ on recommande de construire le graphique de la fonction $y = f(x)$ sur un papier quadrillé. Les abscisses des points d'intersection du graphique avec l'axe OX sont les racines de l'équation $f(x) = 0$. Parfois il est encore plus commode de remplacer l'équation donnée par une équation équivalente $\varphi(x) = \psi(x)$. Alors les racines de l'équation se déterminent comme les abscisses des points d'intersection des graphiques de $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$.

2°. Méthode des parties proportionnelles (méthode des cordes). Si le segment $[a, b]$ contient une racine unique ξ de l'équation $f(x) = 0$, où $f(x)$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors, en remplaçant la courbe $y = f(x)$ par la corde passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, on trouve la première approximation de la racine par la formule

$$c_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{2}$$

Pour obtenir la seconde approximation c_2, on applique la formule (2) à celui des segments $[a, c_1]$ ou $[c_1, b]$ aux extrémités duquel la fonction $f(x)$ a des signes opposés. Les approximations suivantes se construisent de la même manière. La suite des nombres c_n ($n = 1, 2, \ldots$) converge vers la racine ξ, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \xi.$$

Le calcul des approximations $c_1, c_2, \ldots$, doit être en général prolongé jusqu'à ce que les décimales de la réponse cessent de varier (conformément au degré de précision donné); pour les calculs intermédiaires on recommande de prendre un ou deux chiffres de réserve. Cette remarque a un caractère général.

Si la fonction $f(x)$ a une dérivée continue $f'(x)$ différente de 0 sur le segment $[a, b]$, on peut alors évaluer l'erreur absolue de la valeur approchée c_n de la racine d après la formule

$$|\xi - c_n| \leqslant \frac{|f(c_n)|}{\mu},$$

où $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

3°. Méthode de Newton (méthode des tangentes). Si $f'(x) \neq 0$ et $f''(x) \neq 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ et en outre $f(a) f(b) < 0$, $f(a) f''(a) > 0$, alors la suite des approximations x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) de la racine ξ de l'équation $f(x) = 0$ se calcule d'après les formules

$$x_0 = a, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

Pour les suppositions faites, la suite x $(n = 1, 2, \ldots)$ est monotone et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Pour évaluer l'erreur on peut avoir recours à la formule:

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\mu},$$

où $\mu = \min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)|$.

Pratiquement il est plus commode d'utiliser les formules plus simples:

$$x_0 = a, \quad x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3'}$$

où $\alpha = \dfrac{1}{f'(a)}$ donne approximativement la même précision que les formules (3).

Si $f(b)\, f''(b) > 0$, alors dans les formules (3) et (3') on doit poser $x_0 = b$.

4°. Méthode d'itération. Soit donnée une équation qui peut être ramenée à la forme

$$x = \varphi(x), \tag{4}$$

où $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ (r est une constante) pour $a \leqslant x \leqslant b$. En partant de la valeur x_0 appartenant au segment $[a, b]$ construisons la suite des nombres $x_1, x_2, \ldots$ d'après la loi suivante

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \ldots \tag{5}$$

Si $a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, \ldots)$, alors la limite

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$$

est l'unique racine de l'équation (4) sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire que les x_n sont les *approximations successives* de la racine ξ.

L évaluation de l'erreur absolue de la n-ième approximation x_n est donnée par la formule

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - r}.$$

Donc, si x_n et x_{n+1} coïncident à ε près, alors l'erreur absolue limite pour x_n sera $\dfrac{\varepsilon}{1-r}$.

Pour ramener l'équation $f(x) = 0$ à la forme (4), remplaçons celle-ci par l'équation équivalente

$$x = x - \lambda f(x),$$

où le nombre $\lambda \neq 0$ est choisi de manière que la fonction $\dfrac{d}{dx}[x - \lambda f(x)] = 1 - \lambda f'(x)$ soit petite en valeur absolue au voisinage de x_0 (par exemple, on peut poser $1 - \lambda f'(x_0) = 0$).

Exemple 1. Ramener l'équation $2x - \ln x - 4 = 0$ à la forme (4) si l'approximation initiale de la racine est $x_0 = 2{,}5$.

S o l u t i o n. Ici $f(x) = 2x - \ln x - 4$; $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Ecrivons l'équation équivalente $x = x - \lambda(2x - \ln x - 4)$ et prenons pour valeur convenable de λ le nombre 0,5 voisin de la racine de l'équation $1 - \lambda\left(2 - \frac{1}{x}\right)\Big|_{x=2,5} = 0$, c'est-à-dire voisin de $\frac{1}{1,6} \approx 0,6$.

L'équation initiale se met sous la forme

$$x = x - 0,5\,(2x - \ln x - 4)$$

ou

$$x = 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

E x e m p l e 2. Calculer à 0,01 près la racine ξ comprise entre 2 et 3 de l'équation précédente.

C a l c u l d e l a r a c i n e d'a p r è s l a m é t h o d e d'i t é r a t i o n. Utilisons le résultat de l'exemple (1) en posant $x_0 = 2,5$. Les calculs se font d'après la formule (5) avec un chiffre de réserve.

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2,5 \approx 2,458,$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2,458 \approx 2,450,$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2,450 \approx 2,448,$$

$$x_4 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2,448 \approx 2,448.$$

Ainsi, $\xi \approx 2,45$ (on peut arrêter le processus de l'approximation puisque la troisième décimale (millièmes) est fixée).

Donnons l'évaluation de l'erreur. On a

$$\varphi(x) = 2 + \frac{1}{2}\ln x \text{ et } \varphi'(x) = \frac{1}{2x}.$$

En supposant que toutes les approximations x_n appartiennent au segment $[2,4;\ 2,5]$ on trouve:

$$r = \max|\varphi'(x)| = \frac{1}{2 \cdot 2,4} = 0,21.$$

Par conséquent, l'erreur absolue limite de l'approximation x_3 d'après la remarque faite précédemment est

$$\Delta = \frac{0,001}{1 - 0,21} = 0,0012 \approx 0,001.$$

Ainsi, la racine exacte ξ de l'équation se trouve entre les limites

$$2,447 < \xi < 2,449;$$

on peut prendre $\xi \approx 2,45$, de plus, tous les chiffres de cette approximation sont exacts au sens étroit.

Calculs de la racine d'après la méthode de Newton. Ici on a

$$f(x)=2x-\ln x-4,\ f'(x)=2-\frac{1}{x},\ \ f''(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Sur le segment $2 \leqslant x \leqslant 3$ on a $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$; $f(2)\cdot f(3) < 0$, $f(3)\,f''(3) > 0$. Par conséquent, les conditions du 3° pour $x_0 = 3$ sont vérifiées.

Prenons

$$\alpha=\left(2-\frac{1}{3}\right)^{-1}=0{,}6.$$

Les calculs se font d'après les formules (3') avec deux chiffres de réserve :

$$x_1 = 3 - 0{,}6\,(2\cdot 3 - \ln 3 - 4) = 2{,}4592;$$
$$x_2 = 2{,}4592 - 0{,}6\,(2\cdot 2{,}4592 - \ln 2{,}4592 - 4) = 2{,}4481;$$
$$x_3 = 2{,}4481 - 0{,}6\,(2\cdot 2{,}4481 - \ln 2{,}4481 - 4) = 2{,}4477;$$
$$x_4 = 2{,}4477 - 0{,}6\,(2\cdot 2{,}4477 - \ln 2{,}4477 - 4) = 2{,}4475.$$

On arrête les calculs puisque le nombre des millièmes ne change plus. Réponse: la racine est $\xi = 2{,}45$. Nous ne donnons pas l'évaluation de l'erreur.

5°. Cas dun système de deux équations. Soit à calculer, à un degré de précision donné, les racines réelles d'un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

et soit donnée une approximation initiale d'une des solutions (ξ, η) de ce système $x = x_0$, $y = y_0$.

Cette approximation initiale peut être par exemple obtenue en construisant graphiquement (sur un même système des coordonnées cartésiennes) les courbes $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ et en déterminant les coordonnées des points d'intersection de ces courbes.

a) Méthode de Newton. Supposons que le déterminant fonctionnel

$$I=\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)}$$

ne s'annule pas au voisinage de l'approximation initiale $x = x_0$, $y = y_0$. Alors, d'après la méthode de Newton, la première approximation de la solution du système (6) est de la forme $x_1 = x_0 + \alpha_0$, $y_1 = y_0 + \beta_0$, où α_0, β_0 est la solution du système de deux équations linéaires

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + \alpha_0 f'_x(x_0, y_0) + \beta_0 f'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) + \alpha_0 \varphi'_x(x_0, y_0) + \beta_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

La seconde approximation s'obtient par le même procédé

$$x_2 = x_1 + \alpha_1,\quad y_2 = y_1 + \beta_1,$$

où α_1, β_1 est la solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) + \alpha_1 f'_x(x_1, y_1) + \beta_1 f'_y(x_1, y_1) = 0, \\ \varphi(x_1, y_1) + \alpha_1 \varphi'_x(x_1, y_1) + \beta_1 \varphi'_y(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

De la même manière on détermine la troisième et les approximations suivantes.

b) Méthode d'itération. Pour trouver la solution du système d'équations (6) on peut appliquer la méthode d'itération en transformant ce système en un système équivalent

$$\begin{cases} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y), \end{cases} \tag{7}$$

et en supposant que

$$\begin{aligned} |F'_x(x, y)| + |\Phi'_x(x, y)| \leqslant r < 1; \\ |F'_y(x, y)| + |\Phi'_y(x, y)| \leqslant r < 1 \end{aligned} \tag{8}$$

dans un certain voisinage à deux dimensions U de l'approximation initiale (x_0, y_0) et contenant la solution exacte (ξ, η) du système.

Les approximations successives (x_n, y_n) $(n = 1, 2 \ldots)$ convergent vers la solution du système (7) ou, ce qui est la même chose, vers la solution du système (6) construite d'après la loi suivante

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0, y_0), & y_1 &= \Phi(x_0, y_0), \\ x_2 &= F(x_1, y_1), & y_2 &= \Phi(x_1, y_1), \\ x_3 &= F(x_2, y_2), & y_3 &= \Phi(x_2, y_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si tous les (x_n, y_n) appartiennent à U, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

Pour ramener le système d'équation (6) à la forme (7) en conservant la condition (8) on peut recommander le procédé suivant. Considérons le système d'équations:

$$\begin{cases} \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) = 0, \\ \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

équivalent au système (6) sous la condition que $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Transcrivons-le comme suit:

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) \equiv F(x, y), \\ y &= y + \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) \equiv \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Choisissons les paramètres α, β, γ, δ de manière que les dérivées partielles des fonctions $F(x, y)$ et $\Phi(x, y)$ soient égales ou voisines de zéro pour l'approximation initiale, c'est-à-dire déterminons α, β, γ, δ comme les solutions approchées du système d'équations

$$\begin{cases} 1 + \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ \alpha f'_y(x_0, y_0) + \beta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \gamma f'_x(x_0, y_0) + \delta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ 1 + \gamma f'_y(x_0, y_0) + \delta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Pour ce choix des paramètres α, β, γ, δ, en supposant que les dérivées partielles des fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ ne varient pas trop rapidement au voisinage de l'approximation initiale (x_0, y_0), la condition (8) sera observée.

Exemple 3. Ramener le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0, \end{cases}$$

à la forme (7) pour l'approximation initiale $x_0 = 0{,}8$, $y_0 = 0{,}55$ de la racine.

Solution. Ici on a $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\varphi(x, y) = x^3 - y$; $f'_x(x_0, y_0) = 1{,}6$, $f'_y(x_0, y_0) = 1{,}1$; $\varphi'_x(x_0, y_0) = 1{,}92$, $\varphi'_y(x_0, y_0) = -1$.

Ecrivons le système

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y) = 0, \\ \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \neq 0\right),$$

équivalent au système initial, sous la forme

$$x = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),$$
$$y = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

Prenons pour valeurs numériques convenables de α, β, γ et δ les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 1 + 1{,}6\alpha + 1{,}92\beta = 0, \\ 1{,}1\alpha - \beta = 0, \\ 1{,}6\gamma + 1{,}92\delta = 0, \\ 1 + 1{,}1\gamma - \delta = 0; \end{cases}$$

c'est-à-dire nous prenons $\alpha \approx -0{,}3$, $\beta \approx -0{,}3$, $\gamma \approx -0{,}5$, $\delta \approx 0{,}4$.

Alors le système d'équations

$$\begin{cases} x = x - 0{,}3(x^2 + y^2 - 1) - 0{,}3(x^3 - y), \\ y = y - 0{,}5(x^2 + y^2 - 1) + 0{,}4(x^3 - y) \end{cases}$$

est équivalent au système initial et a la forme (7). En outre, dans un voisinage suffisamment petit du point (x_0, y_0) la condition (8) est satisfaite.

Par la méthode de séparation des racines réelles des équations et à l'aide de la méthode des parties proportionnelles calculer les racines des équations données ci-dessous à 0,01 près.

3138. $x^3 - x + 1 = 0$.
3139. $x^4 + 0{,}5x - 1{,}55 = 0$.
3140. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

En partant des approximations initiales trouvées graphiquement, calculer à 0,01 près par la méthode de Newton les racines réelles des équations suivantes:

3141. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

3142. $2x - \ln x - 4 = 0$.

3143. $2^x = 4x$.

3144. $\lg x = \frac{1}{x}$.

En utilisant les approximations initiales déterminées par voie graphique, calculer à 0,01 près par la méthode d'itération les racines réelles des équations suivantes:

3145. $x^3 - 5x + 0{,}1 = 0$.

3146. $4x = \cos x$.

3147. $x^5 - x - 2 = 0$.

Trouver graphiquement les approximations initiales et calculer à 0,01 près les racines réelles des équations et des systèmes:

3148. $x^3 - 3x + 1 = 0$.

3149. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.

3150. $x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

3151. $x \cdot \ln x - 14 = 0$.

3152. $x^3 + 3x - 0{,}5 = 0$.

3153. $4x - 7 \sin x = 0$.

3154. $x^x + 2x - 6 = 0$.

3155. $e^x + e^{-3x} - 4 = 0$.

3156. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$

3157. $\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0, \\ y - \lg x - 1 = 0. \end{cases}$

3158. Calculer à 0,001 près la plus petite racine positive de l'équation $\operatorname{tg} x = x$.

3159. Calculer à 0,0001 près les racines de l'équation $x \cdot \operatorname{th} x = 1$.

§ 4. Intégration numérique

1°. Formule des trapèzes. Pour le calcul approché de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

($f(x)$ est continue sur $[a, b]$) divisons l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n parties égales et prenons pour pas du calcul $h = \frac{b-a}{n}$. Soient $x_i = x_0 + ih$ ($x_0 = a$, $x_n = b$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) les abscisses des points de divisions et $y_i = f(x_i)$ les valeurs correspondantes de la fonction à intégrer $y = f(x)$. Alors, d'après la *formule des trapè-*

zes, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right) \qquad (1)$$

et l'erreur absolue est

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)\cdot M_2$$

où $M_2 = \max|f''(x)|$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.

Pour atteindre la précision donnée ε, lors du calcul d'une intégrale le pas du calcul h doit être déterminé par l'inégalité

$$h^2 \leqslant \frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}, \qquad (2)$$

c'est-à-dire h doit être de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$. La valeur ainsi obtenue de h est arrondie par défaut de manière que

$$\frac{b-a}{h}=n$$

soit un nombre entier, ce qui nous donne le nombre de divisions. Ayant déterminé h et n d'après la formule (1) on calcule l'intégrale en prenant les valeurs de la fonction à intégrer avec une ou deux décimales de réserve.

2°. Formule de Simpson (formule des paraboles). Si n est un entier pair, avec les notations de 1°, on a la *formule de Simpson*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[(y_0+y_n)]+4(y_1+y_3+\dots+y_{n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\dots+y_{n-2})] \qquad (3)$$

dont l'erreur absolue est

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \qquad (4)$$

où $M_4 = \max|f^{(IV)}(x)|$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.

Pour assurer une exactitude donnée ε dans le calcul d'une intégrale le pas du calcul h est déterminé par l'inégalité

$$\frac{h^4}{180}(b-a)M_4 \leqslant \varepsilon, \qquad (5)$$

c'est-à-dire le pas h est de l'ordre de $\sqrt[4]{\varepsilon}$. On arrondit le nombre h par défaut de manière que $n=\dfrac{b-a}{h}$ soit un nombre entier pair.

Remarque. Puisque la détermination du pas du calcul h et du nombre n qui lui est lié d'après les formules (2) et (5) est en général compliquée, alors en pratique on détermine h à tâtons. Puis, ayant obtenu le résultat, on double le nombre n, c'est-à-dire que l'on divise par 2 le pas h. Si le nouveau résultat coïncide avec l'ancien avec les décimales conservées, le calcul s'arrête. Dans le cas contraire, on répète ce procédé, etc.

Pour un calcul approché de l'erreur absolue R de la formule de Simpson (3) on peut utiliser le *principe de Runge*, d'après lequel

$$R = \frac{|\Sigma - \overline{\Sigma}|}{15},$$

où Σ et $\overline{\Sigma}$ sont les résultats des calculs d'après la formule (3) correspondant aux pas h et $H = 2h$.

3160. Sous l'action d'une force variable $\vec{F}$ dirigée suivant l'axe OX, un point matériel se déplace sur l'axe OX du point $x = 0$ au point $x = 4$. Calculer approximativement le travail A de la force $\vec{F}$ si le tableau des valeurs du module de $\vec{F}$ est donné

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
F	1,50	0,75	0,50	0,75	1,50	2,75	4,50	6,75	10,00

Effectuer les calculs d'après la formule des trapèzes et la formule de Simpson.

3161. Calculer approximativement $\int_0^1 (3x^2 - 4x)\,dx$ d'après la formule des trapèzes en prenant $n = 10$. Calculer la valeur exacte de cette intégrale et déterminer les erreurs absolue et relative. Etablir la limite supérieure Δ de l'erreur absolue calculée pour $n = 10$ en utilisant la formule des erreurs donnée dans le texte.

3162. Calculer à 10^{-4} près d'après la formule de Simpson l'intégrale $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x+1}$ en prenant $n = 10$. Déterminer la limite supérieure Δ de l'erreur absolue en se servant de la formule des erreurs donnée dans le texte.

Calculer à 0,01 près les intégrales définies suivantes:

3163. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

3164. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

3165. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

3166. $\int_1^2 x \lg x \, dx$.

3167. $\int_1^2 \frac{\lg x}{x} dx$.

3168. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$.

3169. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$.

3170. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$.

3171. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$.

3172. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

3173. Calculer à 0,01 près l'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ en utilisant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. Vérifier le calcul en appliquant la formule de Simpson à l'intégrale $\int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$, où b est choisi de manière que $\int_b^\infty \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

3174. Une figure plane limitée par une demi-onde de la sinusoïde $y = \sin x$ et l'axe OX tourne autour de l'axe OX. Calculer d'après la formule de Simpson à 0,01 près le volume du corps de révolution.

3175*. Calculer d'après la formule de Simpson à 0,01 près la longueur de l'arc de l'ellipse $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{(0,6222)^2} = 1$ situé dans le premier quart de plan.

§ 5. Intégration numérique des équations différentielles

1°. Méthode des approximations successives (méthode de Picard). Soit donnée une équation différentielle du 1-er ordre

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

avec la condition initiale $y = y_0$ pour $x = x_0$.

La solution $y(x)$ de l'équation (1) vérifiant la condition initiale donnée peut être représentée en général sous la forme

$$y(x) = \lim_{i \to \infty} y_i(x), \tag{2}$$

où $y_i(x)$ sont les *approximations successives* données par les formules

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{i-1}(x))\, dx$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si le second membre $f(x, y)$ est défini et continu dans le voisinage

$$R\{|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}$$

et satisfait dans ce voisinage à la *condition de Lipschitz*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|$$

(L est une constante), alors la méthode des approximations successives (2) converge à priori dans l'intervalle fermé

$$|x - x_0| \leqslant h,$$

où $h = \min\limits_R \left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ et $M = \max\limits_R |f(x, y)|$. En outre, l'erreur est

$$R_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

si seulement

$$|x - x_0| \leqslant h.$$

Avec de légères modifications, la méthode des approximations successives (*méthode de Picard*) est aussi applicable aux systèmes normaux d'équations différentielles. En ce qui concerne les équations différentielles d'ordres supérieurs, on sait qu'on peut toujours les ramener à des systèmes d'équations différentielles.

2°. Méthode de Runge-Kutta. Supposons que l'on veuille trouver la solution $y(x)$ du problème (1) sur l'intervalle fermé $x_0 \leqslant x \leqslant X$ avec un degré de précision donné ε.

Pour cela choisissons d'abord $h = \dfrac{X - x_0}{n}$ (le *pas du calcul*) en divisant le segment $[x_0, X]$ en n parties égales de manière que $h^4 < \varepsilon$. Les points de division x_i sont définis par la formule

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

D'après la méthode de Runge-Kutta les valeurs correspondantes $y_i = y(x_i)$ de la fonction inconnue se calculent successivement d'après les formules

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

où

$$i_0 = 0, 1, 2, \ldots, n \text{ et}$$

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i)\, h, \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) h, \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) h, \\ k_4^{(i)} &= f(x_i + h,\ y_i + k_3^{(i)})\, h. \end{aligned} \tag{3}$$

Pour vérifier le choix judicieux du pas h, on recommande de vérifier la grandeur

$$\theta = \left| \frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}} \right|.$$

La fraction θ doit être de l'ordre de plusieurs centièmes; dans le cas contraire, le pas h doit être diminué.

La méthode de Runge-Kutta a une précision de l'ordre de h^4. Une évaluation grossière de l'erreur donnée par la méthode de Runge-Kutta sur l'intervalle fermé $[x_0, X]$ peut être obtenue en partant du principe de Runge:

$$R = \frac{|y_{2m} - \tilde{y}_m|}{15},$$

où $n = 2m$, y_{2m} et $\tilde{y}_m$ sont les résultats des calculs d'après le schéma (3) avec les pas h et $2h$.

La méthode de Runge-Kutta est aussi applicable à la solution d un système d'équations différentielles

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = \varphi(x, y, z) \tag{4}$$

avec des conditions initiales données $y = y_0$, $z = z_0$, pour $x = x_0$.

3°. Méthode de Milne. Pour résoudre le problème (1) d'après la méthode de Milne, en partant des données initiales $y = y_0$ pour $x = x_0$ on détermine à l'aide d'un procédé quelconque les valeurs successives

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3)$$

de la fonction inconnue $y(x)$ par exemple, on peut avoir recours au développement de la solution $y(x)$ en série (chapitre IX, § 17) ou bien encore trouver ces valeurs par la méthode des approximations successives, ou en appliquant la méthode de Runge-Kutta, etc.).

Les approximations $\bar{y}_i$ et $\bar{\bar{y}}_i$ pour les valeurs suivantes de y_i ($i = 4, 5, \ldots, n$) sont trouvées successivement par les formules

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_i &= y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}), \\ \bar{\bar{y}}_i &= y_{i-2} + \frac{h}{3}(\bar{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où $f_i = f(x_i, y_i)$ et $\bar{f}_i = f(x_i, \bar{y}_i)$. Pour la vérification, on calcule la grandeur

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29} | \bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i |. \tag{6}$$

Si ε_i n'est pas supérieur d'une unité au dernier chiffre de rang 10^{-m} conservé dans la réponse de $y(x)$, alors pour y_i on peut prendre $\bar{y}_i$ et passer au calcul de la valeur suivante y_{i+1} en répétant le procédé. Mais si $\varepsilon_i > 10^{-m}$, on doit alors recommencer les calculs dès le début en diminuant le pas du calcul. La mesure du pas initial est déterminée approximativement par l'inégalité $h^4 < 10^{-m}$.

Pour le cas de la solution du système (4) la formule de Milne doit être écrite séparément pour chaque fonction $y(x)$ et $z(x)$. L'ordre des calculs est conservé.

Exemple 1. On donne l'équation différentielle $y' = y - x$ avec la condition initiale $y(0) = 1{,}5$. Calculer à 0,01 près la valeur de la solution de cette équation pour la valeur de la variable $x = 1{,}5$. On demande de faire les calculs en combinant la méthode de Runge-Kutta et la méthode de Milne.

Solution. Choisissons d'abord le pas h des calculs à partir de la condition $h^4 < 0{,}01$. En évitant des complications d'écriture pour le nombre h considérons le cas $h = 0{,}25$. Partageons l'intervalle d'intégration de $x = 0$ à $x = 1{,}5$ en six parties égales de longueur 0,25, à l'aide des points x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), les valeurs correspondantes de la solution y et de sa dérivée y' seront désignées par y_i et y'_i.

Calculons d'après la méthode de Runge-Kutta (d'après les formules (3)) les trois premières valeurs de y (sans compter la valeur initiale); les trois autres valeurs y_4, y_5, y_6 seront calculées à l'aide de la méthode de Milne (d'après les formules (5)).

Il est évident que la valeur y_6 est la réponse du problème.

Effectuons les calculs avec deux chiffres de réserve d'après le schéma défini qui est constitué de deux tableaux successifs 1 et 2. On donne la réponse à la fin du tableau 2.

Calcul de la valeur y_1. Dans notre cas $f(x, y) = -x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1{,}5$.

$$h = 0{,}25. \quad \Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{6}(0{,}3750 + 2 \cdot 0{,}3906 + 2 \cdot 0{,}3926 + 0{,}4106) = 0{,}3920;$$

$$k_1^{(0)} = f(x_0, y_0)\, h = (-0 + 1{,}5000)\, 0{,}25 = 0{,}3750;$$

$$k_2^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 = \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) h = (-0{,}125 + 1{,}5000 + 0{,}1875)\, 0{,}25 =$$

$$= 0{,}3906;$$

$$k_3^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) h = (-0{,}125 + 1{,}5000 + 0{,}1953)\, 0{,}25 =$$

$$= 0{,}3926;$$

$$k_4^{(0)} = f(x_0 + h,\ y_0 + k_3^{(0)})\, h = (-0{,}25 + 1{,}5000 + 0{,}3926)\, 0{,}25 = 0{,}4106;$$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}5000 + 0{,}3920 = 1{,}8920$ (on garantit les trois premiers chiffres de cette valeur approchée). Pour la vérification, calculons

$$\theta = \left| \frac{k_2^{(0)} - k_3^{(0)}}{k_1^{(0)} - k_2^{(0)}} \right| = \frac{|0{,}3906 - 0{,}3926|}{|0{,}3750 - 0{,}3906|} \equiv \frac{20}{156} = 0{,}13.$$

D'après ce critère, le pas h a été choisi assez grossièrement.

On calcule de la même manière les valeurs y_2 et y_3. Les résultats des calculs sont groupés dans le tableau 1.

Tableau 1. **Calcul de y_1, y_2, y_3 d'après la méthode de Runge-Kutta.**

$f(x, y) = -x + y;\ h = 0{,}25$

valeurs de i	x_i	y_i	$y_i' \equiv \equiv f(x_i, y_i)$	$k_1^{(i)}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_2^{(i)}$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8920	1,6420	0,4105	1,7223	0,4306
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	1,9273	0,4818
3	0,75	2,8084	2,0584	0,5146	2,1907	0,5477

valeurs de i	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$	$k_3^{(i)}$	$f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$	$k_4^{(i)}$	Δy_i	y_{i+1}
0	1,5703	0,3926	1,6426	0,4106	0,3920	1,8920
1	1,7323	0,4331	1,8251	1,4562	0,4323	2,3243
2	1,9402	0,4850	2,0593	0,5148	0,4841	2,8084
3	2,2073	0,5518	2,3602	0,5900	0,5506	3,3590

Calcul de la valeur y_4. On a $f(x, y) = -x + y$, $h = 0{,}25$, $x_4 = 1$;

$$y_0 = 1{,}5000,\ y_1 = 1{,}8920,\ y_2 = 2{,}3243,\ y_3 = 2{,}8084,$$

$$y_0' = 1{,}5000,\ y_1' = 1{,}6420,\ y_2' = 1{,}8243,\ y_3' = 2{,}0584.$$

En appliquant les formules (5), on trouve

$$\bar{y}_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y_1' - y_2' + 2y_3') =$$

$$= 1{,}5000 + \frac{4 \cdot 0{,}25}{3}(2 \cdot 1{,}6420 - 1{,}8243 + 2 \cdot 2{,}0584) = 3{,}3588;$$

$$\bar{y}'_4 = f(x_4, \bar{y}_4) = -1 + 3{,}3588 = 2{,}3588\,;$$

$$\bar{\bar{y}}_4 = y_2 + \frac{h}{3}(\bar{y}'_4 + 4y'_3 + y'_2) = 2{,}3243 +$$

$$+ \frac{0{,}25}{3}(2{,}3588 + 4 \cdot 2{,}0584 + 1{,}8243) = 3{,}3590\,;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{|\bar{y}_4 - \bar{\bar{y}}_4|}{29} = \frac{|3{,}3588 - 3{,}3590|}{29} = \frac{0{,}0002}{29} \approx 7 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2} \cdot 0{,}001\,;$$

par conséquent, on n a pas à réviser le pas des calculs.

On trouve $y_4 = \bar{\bar{y}}_4 = 3{,}3590$ (on garantit les trois premiers chiffres de cette valeur approchée).

De la même manière, on calcule les valeurs y_5 et y_6. Les résultats des calculs sont groupés dans le tableau 2.

Ainsi on a en définitive:

$$y\,(1{,}5) = 4{,}74.$$

4°. Méthode d'Adams. Pour résoudre le problème (1) d'après la méthode d Adams, on part des données initiales $y\,(x_0) = y_0$ pour trouver à l'aide d'une méthode de son choix trois valeurs consécutives de la fonction inconnue $y\,(x)$:

$$y_1 = y\,(x_1) = y\,(x_0 + h), \quad y_2 = y\,(x_2) = y\,(x_0 + 2h),$$

$$y_3 = y\,(x_3) = y\,(x_0 + 3h)$$

(ces trois valeurs peuvent être obtenues par exemple en développant $y\,(x)$ en série entière (chapitre IX, § 16), ou bien on les détermine à l'aide de la méthode des approximations successives (voir 1°) ou encore en appliquant la méthode de Runge-Kutta (voir 2°), etc.).

A l'aide des nombres x_0, x_1, x_2, x_3 et y_0, y_1, y_2, y_3, on calcule les grandeurs q_0, q_1, q_2, q_3, où

$$q_0 = hy'_0 = hf\,(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf\,(x_1, y_1),$$

$$q_2 = hy'_2 = hf\,(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf\,(x_3, y_3).$$

Formons ensuite le *tableau diagonal* des différences finies de la grandeur q:

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y' = f(x, y)$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
x_6	y_6						

La *méthode d'Adams* consiste à prolonger le tableau diagonal des différences à l'aide de la *formule d'Adams*

$$\Delta y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}. \qquad (7)$$

Ainsi, en utilisant les nombres q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$ groupés et disposés en diagonale dans le tableau des différences, nous pouvons à l'aide de la formule (7), pour $n = 3$, calculer $\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Ayant trouvé la valeur Δy_3, nous calculons $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Connaissant x_4 et y_4, nous pouvons calculer $q_4 = hf(x_4, y_4)$ puis porter y_4, Δy_3 et q_4 dans le tableau des différences et le compléter par les différences finies Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$ disposées avec q_4 sur une nouvelle diagonale parallèle à la diagonale précédente.

Ensuite, utilisant les nombres de la nouvelle diagonale, nous pouvons à l'aide de la formule (7), pour $n = 4$, calculer Δy_4, y_5 et q_5 et ainsi obtenir la diagonale suivante: q_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. A l'aide de cette diagonale, nous calculons la valeur y_6 de la fonction inconnue $y(x)$, etc.

Pour calculer Δy d'après la formule d Adams (7) on part de la supposition que les troisièmes différences finies $\Delta^3 q$ sont constantes.

Tableau 2. Calcul de y_4, y_5, y_6 d'après la méthode de Milne. $f(x, y) = -x + y$; $h = 0{,}25$.
(On désigne en italique les données de départ)

valeurs de i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\overline{y}_i$	$\overline{y}'_i = f(x_i, \overline{y}_i)$	$\overline{\overline{y}}_i$	ε_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	Révision du pas du calcul (d'après les indications des formules (6))
0	*0*	*1,5000*	*1,5000*							
1	*0,25*	*1,8920*	*1,6420*							
2	*0,50*	*2,3243*	*1,8243*							
3	*0,75*	*2,8084*	*2,0584*							
4	1,00			3,3588	2,3588	3,3590	$\approx 7 \cdot 10^{-5}$	3,3590	2,3590	n'est pas exigée
5	1,25			3,9947	2,7447	3,9950	$\approx 10^{-5}$	3,9950	2,7450	n'est pas exigée
6	1,50			4,7402	3,2402	4,7406	$\approx 1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$\boxed{4{\cdot}7406}$		n'est pas exigée
							Réponse:	$y(1{,}5) = 4{,}74$		

Conformément à ce qui précède, la grandeur h du pas initial du calcul est donnée par l'inégalité $h^4 < 10^{-m}$ (si nous désirons obtenir la valeur de $y(x)$ à 10^{-m} près).

De ce point de vue la formule d'Adams (7) est équivalente aux formules de Milne (5) et aux formules de Runge-Kutta (3).

L'évaluation de l'erreur commise par la méthode d'Adams est compliquée et pratiquement inutile puisque dans le cas général elle donne une forte exagération des résultats. En pratique on surveille la marche des différences finies d'ordre trois en choisissant le pas h suffisamment petit pour que les différences voisines $\Delta^3 q_i$ et $\Delta^3 q_{i+1}$ diffèrent au plus d'une ou deux unités du chiffre de rang donné (sans compter les chiffres de réserve).

Pour améliorer la précision du résultat, la formule d'Adams peut être complétée par des termes contenant les différences du quatrième ordre et d'ordres supérieurs de la grandeur q. En outre, le nombre des premières valeurs de la fonction y nécessaires pour compléter le tableau initial augmente. Les formules d'Adams à précision accrue ne seront pas considérées.

Exemple 2. Calculer pour $x = 1{,}5$ à 0,01 près en combinant la méthode de Runge-Kutta avec la méthode d'Adams la valeur de la solution de l'équation différentielle $y' = y - x$ avec la condition initiale $y(0) = 1{,}5$ (voir exemple 1).

Solution. Utilisons les valeurs y_1, y_2, y_3 de la réponse de l'exemple 1. Leur calcul est donné dans le tableau 1.

Nous calculons d'après la méthode d'Adams les valeurs suivantes y_4, y_5, y_6 (voir tableaux 3 et 4).

Tableau 3. **Tableau fondamental pour calculer y_4, y_5, y_6 d'après la méthode d'Adams.**

$$f(x, y) = -x + y; \quad h = 0{,}25$$

(On désigne en italique les données de départ)

Valeurs de i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = y'_i h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	*0*	*1,5000*		*1,5000*	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	*0,25*	*1,8920*		*1,6420*	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	*0,50*	*2,3243*		*1,8243*	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	*0,75*	*2,8084*	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	

Valeurs de i	x_i	y_i	Δy_i	$y_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = y'_i h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
4	1,00	3,3588	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	$\boxed{4,7394}$						

Réponse: 4,74

Tableau 4. **Tableau auxiliaire pour le calcul d'après la méthode d'Adams.**

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$$

Valeurs de i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0,5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0,6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0,7450

La réponse du problème est $y_6 = 4,74$.

Dans le cas de la solution du système (4) la formule d'Adams (7) et le schéma des calculs donné au tableau 3 sont appliqués séparément aux deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$.

Trouver trois approximations successives des solutions des équations et des systèmes différentiels indiqués ci-dessous.

3176. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0$.

3177. $y' = x + y + z$, $z' = y - z$; $y(0) = 1$, $z(0) = -2$.

3178. $y'' = -y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

On demande de calculer approximativement à l'aide de la méthode de Runge-Kutta en prenant pour pas $h = 0{,}2$ les solutions des équations et systèmes différentiels pour les intervalles indiqués:

3179. $y' = y - x$; $y(0) = 1{,}5$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

3180. $y' = \frac{y}{x} - y^2$; $y(1) = 1$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

3181. $y' = z + 1$, $z' = y - x$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

En combinant la méthode de Runge-Kutta avec la méthode de Milne ou celle de Runge-Kutta avec celle d'Adams, on demande de calculer, à 0,01 près, les solutions des équations et systèmes différentiels donnés ci-dessous pour les valeurs indiquées de la variable:

3182. $y' = x + y$, $y = 1$ pour $x = 0$. Calculer y pour $x = 0{,}5$.

3183. $y' = x^2 + y$, $y = 1$ pour $x = 0$. Calculer y pour $x = 1$.

3184. $y' = 2y - 3$, $y = 1$ pour $x = 0$. Calculer y pour $x = 0{,}5$.

3185. $\begin{cases} y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + 2y + 3z; \end{cases}$ $y = 2$, $z = -2$ pour $x = 0$.

Calculer y et z pour $x = 0{,}5$.

3186. $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z, \end{cases}$ $y = 2$, $z = -1$ pour $x = 0$.

Calculer y et z pour $x = 0{,}5$.

3187. $y'' = 2 - y$, $y = 2$, $y' = -1$ pour $x = 0$.

Calculer y pour $x = 1$.

3188. $y^3 y'' + 1 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$ pour $x = 1$.

Calculer y pour $x = 1{,}5$.

3189. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{2}\cos 2t = 0$, $x = 0$, $x' = 1$ pour $t = 0$.

Trouver $x(\pi)$ et $x'(\pi)$.

§ 6. Calcul approché des coefficients de Fourier

Schéma des 12 ordonnées. Soient $y_n = f(x_n)$ ($n = 0, 1, \ldots, 12$) les valeurs de la fonction $y = f(x)$ aux points équidistants $x_n = \frac{\pi n}{6}$ de l'intervalle fermé $[0, 2\pi]$, en outre $y_0 = y_{12}$. Formons les tableaux

	$y_0\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ y_6$ $y_{11}\ y_{10}\ y_9\ y_8\ y_7$
Sommes (Σ) Différences (Δ)	$u_0\ u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6$ $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$

	$u_0\ u_1\ u_2\ u_3$ $u_6\ u_5\ u_4$		$v_1\ v_2\ v_3$ $v_5\ v_4$
Sommes Différences	$s_0\ s_1\ s_2\ s_3$ $t_0\ t_1\ t_2$	Sommes Différences	$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ $\tau_1\ \tau_2$

Les coefficients de Fourier a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, 3$) de la fonction $y = f(x)$ peuvent être approximativement donnés par les formules:

$$\begin{aligned} 6a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, & 6b_1 &= 0{,}5\sigma_1 + 0{,}866\sigma_2 + \sigma_3, \\ 6a_1 &= t_0 + 0{,}866t_1 + 0{,}5t_2, & 6b_2 &= 0{,}866\,(\tau_1 + \tau_2), \\ 6a_2 &= s_0 - s_3 + 0{,}5\,(s_1 - s_2), & 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3, \\ 6a_3 &= t_0 - t_2, \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$0{,}866 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}.$$

On a

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

On peut faire appel à d'autres schémas. Pour alléger les calculs on utilise des schémas standard.

Exemple. Déterminer le polynôme de Fourier correspondant à la fonction $y = f(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) donnée par le tableau

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
38	38	12	4	14	4	—18	—23	—27	—24	8	32

Solution. Formons les tableaux

y	38	38	12	4	14	4	−18
		32	8	−24	−27	−23	
u	38	70	20	−20	−13	−19	−18
v		6	4	28	41	27	

u	38	70	20	−20
	−18	−19	−13	
s	20	51	7	−20
t	56	89	33	

v	6	4	28
	27	41	
σ	33	45	28
τ	−21	−37	

D'après les formules (1) on a

$$a_0=9{,}7;\quad a_1=24{,}9;\quad a_2=10{,}3;\quad a_3=3{,}8;$$
$$b_1=13{,}9;\quad b_2=-8{,}4;\quad b_3=0{,}8.$$

Par conséquent,

$$f(x)\approx 4{,}8+(24{,}9\cos x+13{,}9\sin x)+(10{,}3\cos 2x-8{,}4\sin 2x)+$$
$$+(3{,}8\cos 3x+0{,}8\sin 3x).$$

A l'aide du schéma des 12 ordonnées, déterminer les polynômes de Fourier pour les fonctions suivantes définies sur l'intervalle $(0,2\pi)$ et données ci-dessous par les tableaux de leurs valeurs correspondant aux valeurs équidistantes de la variable indépendante.

3190.	$y_0=-7200$	$y_3=4300$	$y_6=7400$	$y_9=7600$
	$y_1=300$	$y_4=0$	$y_7=-2250$	$y_{10}=4500$
	$y_2=700$	$y_5=-5200$	$y_8=3850$	$y_{11}=250$
3191.	$y_0=0$	$y_3=9{,}72$	$y_6=7{,}42$	$y_9=5{,}60$
	$y_1=6{,}68$	$y_4=8{,}97$	$y_7=6{,}81$	$y_{10}=4{,}88$
	$y_2=9{,}68$	$y_5=8{,}18$	$y_8=6{,}22$	$y_{11}=3{,}67$
3192.	$y_0=2{,}714$	$y_3=1{,}273$	$y_6=0{,}370$	$y_9=-0{,}357$
	$y_1=3{,}042$	$y_4=0{,}788$	$y_7=0{,}540$	$y_{10}=-0{,}437$
	$y_2=2{,}134$	$y_5=0{,}495$	$y_8=0{,}191$	$y_{11}=0{,}767$

3193. Calculer les premiers coefficients de Fourier d'après le schéma des 12 ordonnées pour les fonctions suivantes:

a) $f(x)=\frac{1}{2\pi^2}(x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x)\qquad(0\leqslant y\leqslant 2\pi)$,

b) $f(x)=\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2\qquad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

RÉPONSES

Chapitre premier

1. Solution. Puisque $a=(a-b)+b$, on $a|a|\leqslant|a-b|+|b|$. D'où $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ et $|a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|$. Par conséquent, $|a-b|\geqslant||a|-|b||$. De plus, $|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|$. 3. a) $-2<x<4$; b) $x<-3, x>1$; c) $-1<x<0$; d) $x>0$. 4. -24; -6; 0; 0; 0; 6. 5. 1; $1\frac{1}{4}$; $\sqrt{1+x^2}$; $|x|^{-1}\sqrt{1+x^2}$; $1/\sqrt{1+x^2}$. 6. π; $\frac{\pi}{2}$; 0. 7. $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$. 8. $f(x)=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$. 9. 0,4. 10. $\frac{1}{2}(x+|x|)$. 11. a) $-1\leqslant x<+\infty$; b) $-\infty<x<+\infty$. 12. $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$. 13. a) $-\infty<x\leqslant-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\leqslant x<+\infty$; b) $x=0$, $|x|\geqslant\sqrt{2}$. 14. $-1\leqslant x\leqslant 2$. Solution. On doit avoir $2+x-x^2\geqslant 0$, ou $x^2-x-2\leqslant 0$, c'est-à-dire $(x+1)(x-2)\leqslant 0$. D'où soit $x+1\geqslant 0$, $x-2\leqslant 0$, c'est-à-dire $-1\leqslant x\leqslant 2$; soit encore $x+1\leqslant 0$, $x-2\geqslant 0$, c'est-à-dire $x\leqslant -1$, $x\geqslant 2$, ce qui est impossible. Ainsi, $-1\leqslant x\leqslant 2$. 15. $-2<x\leqslant 0$. 16. $-\infty<x\leqslant -1$, $0\leqslant x\leqslant 1$. 17. $-2<x<2$. 18. $-1<x<1$, $2<x<+\infty$. 19. $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. 20. $1\leqslant x\leqslant 100$. 21. $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. 22. $\varphi(x)=2x^4-5x^2-10$, $\psi(x)=-3x^6+6x$. 23. a) Paire; b) impaire; c) paire; d) impaire; e) impaire. 24. Indication. Utiliser l'identité $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. 26. a) Périodique, $T=\frac{2}{3}\pi$; b) périodique, $T=\frac{2\pi}{\lambda}$; c) périodique, $T=\pi$; d) périodique, $T=\pi$; e) non périodique. 27. $y=\frac{b}{c}x$, si $0\leqslant x\leqslant c$; $y=b$, si $c<x\leqslant a$; $S=\frac{b}{2c}x^2$, si $0\leqslant x\leqslant c$; $S=bx-\frac{bc}{2}$, si $c<x\leqslant a$. 28. $m=q_1x$ pour $0\leqslant x\leqslant l_1$; $m=q_1l_1+q_2(x-l_1)$ pour $l_1<x\leqslant l_1+l_2$; $m+q_1l_1+p_2l_2+q_3(x-l_1-l_2)$ pour $l_1+l_2<x\leqslant l_1+l_2+l_3=l$. 29. $\varphi(\psi(x))=2^{2x}$; $\psi(\varphi(x))=2x^2$. 30. x. 31. $(x+2)^2$.

37. $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{4}$. 38. a) $y=0$ pour $x=-1$, $y>0$ pour $x>-1$, $y<0$ pour $x<-1$; b) $y=0$ pour $x=-1$ et $x=2$, $y>0$ pour $-1<x<2$, $y<0$ pour $-\infty<x<-1$ et $2<x<+\infty$; c) $y>0$ pour $-\infty<x<+\infty$; d) $y=0$ pour $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ et $x=\sqrt{3}$, $y>0$ pour $-\sqrt{3}<x<0$ et $\sqrt{3}<x<+\infty$, $y<0$ pour $-\infty<x<-\sqrt{3}$ et $0<x<\sqrt{3}$; e) $y=0$ pour $x=1$; $y>0$ pour $-\infty<x<-1$ et $1<x<+\infty$, $y<0$ pour $0<x<1$. 39. a) $x=\frac{1}{2}(y-3)$ $(-\infty<y<+\infty)$; b) $x=\sqrt{y+1}$ et $x=-\sqrt{y+1}$ $(-1\leqslant y<+\infty)$; c) $x=\sqrt[3]{1-y^3}$ $(-\infty<y<+\infty)$; d) $x=2\cdot 10^y$ $(-\infty<y<+\infty)$; e) $x=\frac{1}{3}\operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$. 40. $x=$ pour $-\infty<y\leqslant 0$; $x=\sqrt{y}$ pour $0<y<+\infty$. 41. a) $y=u^{10}$, $u=2x-5$; b) $y=2^u$, $u=\cos x$; c) $y=\lg u$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=\frac{x}{2}$; d) $y=\arcsin u$, $u=3^v$, $v=-x^2$. 42. a) $y=\sin^2 x$; b) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\lg x}$; c) $y=2(x^2-1)$, si $|x|\leqslant 1$ et $y=0$, si $|x|>1$. 43. a) $y=-\cos x^2$, $\sqrt{\pi}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2\pi}$; b) $y=\lg(10-10^x)$, $-\infty<x<1$; c) $y=\frac{x}{3}$ pour $-\infty<x<0$ et $y=x$ pour $0\leqslant x<+\infty$. 46. Indication. Voir appendice VI, fig. 1. 51. Indication. En complétant le trinôme du second degré jusqu'à un carré parfait on a $y=y_0+a(x-x_0)^2$ où $x_0=-\frac{b}{2a}$ et $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. D'où le graphique cherché est la parabole $y=ax^2$ translatée le long de l'axe OX de x_0 et le long de l'axe OY de y_0. 53. Indication. Voir appendice VI, fig. 2. 58. Indication. Voir appendice VI, fig. 3. 61. Indication. Le graphique est l'hyperbole $y=\frac{m}{x}$ translatée de x_0 suivant l'axe OX et de y_0 suivant l'axe OY. 62. Indication. En séparant la partie entière on a $y=\frac{2}{3}-\frac{13}{9}\Big/\left(x+\frac{2}{3}\right)$ (comparer avec 61*). 65. Indication. Voir appendice VI, fig. 4. 67. Indication. Voir appendice VI, fig. 5. 71. Indication. Voir appendice VI, fig. 6. 72. Indication. Voir appendice VI, fig. 7. 73. Indication. Voir appendice VI, fig. 8. 75. Indication. Voir appendice VI, fig. 19. 78. Indication. Voir appendice VI, fig. 23. 80. Indication. Voir appendice VI, fig. 9. 81. Indication. Voir appendice VI, fig. 9. 82. Indication. Voir appendice VI, fig. 10. 83. Indication. Voir appendice VI, fig. 10. 84. Indication. Voir appendice VI, fig. 11. 85. Indication. Voir appendice VI, fig. 11. 87. Indication. La période de la fonction est $T=\frac{2\pi}{n}$. 89. Indication. Le graphique cherché est la sinusoïde $y=5\sin 2x$ d'amplitude 5 et de période π translatée à droite suivant l'axe OX de $1\frac{1}{2}$. 90. Indication. En posant $a=A\cos\varphi$ et $b=-A\sin\varphi$, on a $y=A\sin(x-\varphi)$, où $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et

$\varphi = A\mathrm{rctg}\left(-\frac{b}{a}\right)$. Dans notre cas $A=10$, $\varphi=0{,}927$. 92. Indication. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. 93. Indication. Le graphique cherché est la somme des graphiques $y_1=x$ et $y_2=\sin x$. 94. Indication. Le graphique cherché est le produit des graphiques $y_1=x$ et $y_2=\sin x$. 99. Indication. La fonction est paire. Pour $x>0$ définissons les points où 1) $y=0$, 2) $y=1$ et 3) $y=-1$. Pour $x\to+\infty$, $y\to 1$. 101. Indication. Voir appendice VI, fig. 14. 102. Indication. Voir appendice VI, fig. 15. 103. Indication. Voir appendice VI, fig. 17. 104. Indication. Voir appendice VI, fig. 17. 105. Indication. Voir appendice VI, fig. 18. 107. Indication. Voir appendice VI, fig. 18. 118. Indication. Voir appendice VI, fig. 12. 119. Indication. Voir appendice VI, fig. 12. 120. Indication. Voir appendice VI, fig. 13. 121. Indication. Voir appendice VI, fig. 13. 132. Indication. Voir appendice VI, fig. 30. 133. Indication. Voir appendice VI, fig. 32. 134. Indication. Voir appendice VI, fig. 31. 138. Indication. Voir appendice VI, fig. 33. 139. Indication. Voir appendice VI, fig. 28. 140. Indication. Voir appendice VI, fig. 25. 141. Indication. Formons le tableau des valeurs

t	0	1	2	3	...	—1	—2	—3
x	0	1	8	27	...	—1	—8	—27
y	0	1	4	9	...	1	4	9

En construisant les points (x, y) obtenus nous déterminons la courbe cherchée (voir appendice VI, fig. 7). (On ne porte pas géométriquement le paramètre t.) 142. Voir appendice VI, fig. 19. 143. Voir appendice VI, fig. 27. 144. Voir appendice VI, fig. 29. 145. Voir appendice VI, fig. 22. 150. Voir appendice VI, fig. 28. 151. Indication. On trouve en résolvant l'équation par rapport à y $y=-\pm\sqrt{25-x^2}$. On construit par points la courbe cherchée. 153. Voir appendice VI, fig. 21. 156. Voir appendice VI, fig. 27. Il suffit de construire les points (x, y) correspondant aux abscisses $x=0, \pm\frac{a}{2}, \pm a$. 157. Indication. On a, en résolvant l'équation par rapport à x, $x=10\lg y-y$(*). D'où on trouve les points (x, y) de la courbe cherchée en donnant à l'ordonnée y des valeurs arbitraires $(y>0)$ et en calculant d'après la formule (*) l'abscisse x. Il faut avoir en vie que $\lg y\to-\infty$ pour $y\to 0$. 159. Indication. En passant aux coordonnées polaires $r=\sqrt{x^2+y^2}$

et $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$, on a $r=e^{\varphi}$ (voir appendice VI, fig. 32). 160. Indication. En passant aux coordonnées polaires $x=r\cos\varphi$ et $y=r\sin\varphi$, on a $r=\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$ (voir appendice VI, fig. 32). 161. $F=32+1{,}8C$. 162. $y=0{,}6x\,(10-x)$; $y_{\max}=15$ pour $x=5$. 163. $y=\frac{ab}{2}\sin x$; $y_{\max}=\frac{ab}{2}$ pour $x=\frac{\pi}{2}$. 164. *a*) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$; b) $x=0{,}68$; c) $x_1=1{,}37$, $x_2=10$; d) $x=0{,}40$; e) $x=1{,}50$; f) $x=0{,}86$. 165. a) $x_1=2$, $y_1=5$; $x_2=5$, $y_2=2$; b) $x_1=-3$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-3$; $x_3=2$, $y_3=3$; $x_4=3$, $y_4=2$; c) $x_1=2$, $y_1=2$; $x_2\approx3{,}1$, $y_2\approx-2{,}5$; d) $x_1\approx-3{,}6$, $y_1\approx-3{,}1$; $x_2\approx-2{,}7$, $y_2\approx2{,}9$; $x_3\approx2{,}9$, $y_3\approx1{,}8$; $x_4\approx3{,}4$, $y_4\approx-1{,}6$; e) $x_1=\frac{\pi}{4}$, $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\frac{5\pi}{4}$, $y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 166. $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. a) $n\geqslant4$; b) $n>10$; c) $n\geqslant32$. 167. $n>\frac{1}{\varepsilon}-1=N$. a) $N=9$; b) $N=99$; c) $N=999$. 168. $\delta=\frac{\varepsilon}{5}(\varepsilon<1)$. a) 0,02; b) 0,002; c) 0,0002. 169. a) $\lg x<-N$ pour $0<x<\delta(N)$; b) $2^x>N$ pour $x>X(N)$; c) $|f(x)|>N$ pour $|x|>X(N)$. 170. a) 0; b) 1; c) 2; d) $\frac{7}{30}$. 171. $\frac{1}{2}$. 172. 1. 173. $-\frac{3}{2}$. 174. 1. 175. 3. 176. 1. 177. $\frac{3}{4}$. 178. $\frac{1}{3}$. Indication. Utiliser la formule $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. 179. 0. 180. 0. 181. 1. 182. 0. 183. ∞. 184. 0. 185. 72. 186. 2. 187. 2. 188. ∞. 189. 0. 190. 1. 191. 0. 192. ∞. 193. -2. 194. ∞. 195. $\frac{1}{2}$. 196. $\frac{a-1}{3a^2}$. 197. $3x^2$. 198. -1. 199. $\frac{1}{2}$. 200. 3. 201. $\frac{4}{3}$. 202. $\frac{1}{9}$. 203. $-\frac{1}{56}$. 204. 12. 205. $\frac{3}{2}$. 206. $-\frac{1}{3}$. 207. 1. 208. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 209. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 210. $-\frac{1}{3}$. 211. 0. 212. $\frac{a}{2}$. 213. $-\frac{5}{2}$. 214. $\frac{1}{2}$. 215. 0. 216. a) $\frac{1}{2}\sin2$; b) 0. 217. 3. 218. $\frac{5}{2}$. 219. $\frac{1}{3}$. 220. π. 221. $\frac{1}{2}$. 222. $\cos a$. 223. $-\sin a$. 224. π. 225. $\cos x$. 226. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 227. a) 0; b) 1. 228. $\frac{2}{\pi}$. 229. $\frac{1}{2}$. 230. 0, 231. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 232. $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$. 233. $\frac{1}{2}$. 234. 1. 235. $\frac{2}{3}$. 236. $\frac{2}{\pi}$. 237. $-\frac{1}{4}$. 238. π. 239. $\frac{1}{4}$. 240. 1. 241. 1. 242. $\frac{1}{4}$. 243. 0. 244. $\frac{3}{2}$. 245. 0. 246. e^{-1}. 247. e^2. 248. e^{-1}. 249. e^{-4}. 250. e^x. 251. e. 252. a) 1. Solution.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}.$$ Puisque

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)=-2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x}\right]=-2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=0,$$

alors $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$. b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Solution. De la même manière que précédemment (voir *a*), $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$. Puisque

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=-2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x^2}\right]=-\frac{1}{2},$$ alors

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$. 253. $\ln 2$. 254. $10\lg e$. 255. 1. 256. 1. 257. $-\frac{1}{2}$. 258. 1. Indication. On pose $e^x-1=\alpha$, où $\alpha\to 0$. 259. $\ln a$. Indication. Utiliser l'identité $a=e^{\ln a}$. 260. $\ln a$. Indication. Poser $\frac{1}{n}=\alpha$, où $\alpha\to 0$ (voir exemple 259). 261. $a-b$. 262. 1. 263. a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$. 264. a) -1 ; b) 1. 265. a) -1 ; b) 1. 266. a) 1 ; b) 0. 267. a) 0 ; b) 1. 268. a) -1 ; b) 1. 269. a) -1 ; b) 1. 270. a) $-\infty$; b) $+\infty$. 271. Solution. Si $x\neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), alors $\cos^2 x<1$ et $y=0$; et si $x=k\pi$, alors $\cos^2 x=1$ et $y=1$. 272. $y=x$ pour $0\leqslant x<1$; $y=\frac{1}{2}$ pour $x=1$; $y=0$ pour $x>1$. 273. $y=|x|$. 274. $y=-\frac{\pi}{2}$ pour $x<0$; $y=0$ pour $x=0$; $y=\frac{\pi}{2}$ pour $x>0$. 275. $y=1$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$; $y=x$ pour $1<x<+\infty$. 276. $\frac{61}{450}$. 277. $x_1\to-\frac{c}{b}$; $x_2\to\infty$. 278. π. 279. $2\pi R$. 280. $\frac{e}{e-1}$. 281. $1\frac{1}{3}$. 282. $\frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$. 284. $\lim\limits_{n\to\infty}AC_n=\frac{l}{3}$. 285. $\frac{ab}{2}$.

286. $k=1$, $b=0$; la droite $y=x$ est une asymptote à la courbe $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$. 287. $Q_t^{(n)}=Q_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$, où k est un coefficient de proportionnalité (« la loi des intérêts composés »); $Q_t=Q_0e^{kt}$. 288. $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$; a) $|x|>10$; b) $|x|>100$; c) $|x|>1000$. 289. $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour $0<\varepsilon<1$; a) $|x-1|<0{,}05$; b) $|x-1|<0{,}005$; c) $|x-1|<0{,}0005$. 290. $|x-2|<\frac{1}{N}=\delta$; a) $\delta=0{,}1$; b) $\delta=0{,}01$; c) $\delta=0{,}001$. 291. a) du second ordre, b) du troisième ordre. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$. 292. a) 1; b) 2; c) 3. 293. a) 1; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3. 295. Non. 296. 15. 297. -1. 298. -1. 299. 3. 300. a) 1,03 (1,0296); b) 0,985 (0,9849); c) 3,167 (3,1623). Indication. $\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$; d) 10,954 (10,954). 301. 1) 0,98 (0,9804); 2) 1,03 (1,0309); 3) 0,0095 (0,00952); 4) 3,875 (3,8730); 5) 1,12 (1,125); 6) 0,72 (0,7480); 7) 0,043 (0,04139). 303. a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$. 307. Indication. Si $x>0$, alors pour $|\Delta x|<x$ on a $|\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}|=|\Delta x|/(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\leqslant|\Delta x|/\sqrt{x}$. 309. Indication. Utiliser l'inégalité $|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant|\Delta x|$. 310. a) $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un nombre entier; b) $x\neq k\pi$ où k est un nombre entier. 311. Indication. Utiliser l'inégalité $||x+\Delta x|-|x||\leqslant\Delta x|$. 313. $A=4$. 314. $f(0)=1$. 315. Non. 316. a) $f(0)=n$; b) $f(0)=\frac{1}{2}$; c) $f(0)=2$; d) $f(0)=2$; e) $f(0)=0$; f) $f(0)=1$. 317. $x=2$ est un point de discontinuité de seconde espèce. 318. $x=-1$ est un point de discontinuité apparente. 319. $x=-2$ est un point de discontinuité de seconde espèce; $x=2$ est un point de discontinuité apparente. 320. $x=0$ est un point de discontinuité de première espèce. 321. a) $x=0$ est un point de discontinuité de seconde espèce; b) $x=0$ est un point de discontinuité apparente. 322. $x=0$ est un point de discontinuité apparente, $x=k\pi$ ($k=\pm1, \pm2\ldots$) sont des points de discontinuité où la fonction devient infinie. 323. $x=2\pi k\pm\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) sont des points de discontinuité infinie. 324. $x=k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) sont des points de discontinuité infinie. 325. $x=0$ est un point de discontinuité de première espèce. 326. $x=1$ est un point de discontinuité apparente; $x=1$ est un point de discontinuité de première espèce. 327. $x=-1$ est un point de discontinuité de seconde espèce. 328. $x=0$ est un point de discontinuité apparente. 329. $x=1$ est un point de discontinuité de première espèce. 330. $x=3$ est un point de discontinuité de première espèce. 332. $x=1$ est un point de discontinuité de première espèce. 333. La fonction est continue. 334. a) $x=0$ est un point de discon-

tinuité de première espèce; b) la fonction est continue; c) $x=k\pi$ (k est un nombre entier) sont des points de discontinuité de première espèce. 335. a) $x=k$ (k est un nombre entier) sont des points de discontinuité de première espèce; b) $x=k$ ($k\neq 0$ est un nombre entier) sont des points de discontinuité de première espèce. 337. Non, puisque la fonction $y=E(x)$ est discontinue pour $x=1$. 338. 1, 53. 339. Indication. Montrer que pour x_0 suffisamment grand on a $P(-x_0)\,P(x_0)<0$.

Chapitre II

341. a) 3; b) 0,21; c) $2h+h^2$. 342. a) 0,1; b) -3; c) $\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a}$. 344. a) 624; 1560; b) 0,01; 100; c) -1; 0,000011. 345. a) $a\Delta x$; a; b) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; c) $-\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$; $-\dfrac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; d) $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$; e) $2^x(2^{\Delta x}-1)$; $\dfrac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$; f) $\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}$; $\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$. 346. a) -1; b) 0,1; c) $-h$; 0. 347. 21. 348. 15 cm/s. 349. 7,5. 350. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. 351. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. 352. a) $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; b) $\dfrac{d\varphi}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, où φ est la valeur de l'angle de rotation à l'instant t. 353. a) $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$; b) $\dfrac{dT}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$, où T est la température à l'instant t. 354. $\dfrac{dQ}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, où Q est la quantité de matière à l'instant t. 355. a) $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$; b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$. 356. a) $-\dfrac{1}{6}\approx -0{,}16$; b) $-\dfrac{5}{21}\approx$ $\approx -0{,}238$; c) $-\dfrac{50}{201}\approx -0{,}249$; $y'_{x=2}=-0{,}25$. 357. $\sec^2 x$. Solution. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}\times$ $\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$. 358. a) $3x^2$; b) $-\dfrac{2}{x^3}$; c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $\dfrac{-1}{\sin^2 x}$. 359. $\dfrac{1}{12}$. Solution. $f'(8)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(8+\Delta x)-f(8)}{\Delta x}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+\Delta x}-\sqrt[3]{8}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{8+\Delta x-8}{\Delta x\left[\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(8+\Delta x)\,8}+\sqrt[3]{8^2}\right]}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2}+2\sqrt[3]{8+\Delta x}+4}=\dfrac{1}{12}$. 360. $f'(0)=-8$, $f'(1)=0$, $f'(2)=0$. 361. $x_1=0$; $x_2=3$. Indication. L'équation $f'(x)=f(x)$ pour la fonction donnée est de la forme $3x^2=x^3$. 362. 30 m/s. 363. 1, 2.

364. -1. 365. $f'(x_0)=\frac{-1}{x_0^2}$. 366. -1; 2; $\operatorname{tg}\varphi=3$. Indication. Appliquer les résultats de l'exemple 3 et du problème 365. 367. Solution. a) $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\pm\infty$; b) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}}=\infty$; c) $f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\left|\cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi+\Delta x\right)\right|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=-1$; $f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=1$. 368. $5x^4-12x^2+2$. 369. $-\frac{1}{3}+$ $+2x-2x^3$. 370. $2ax+b$. 371. $-\frac{15x^2}{a}$. 372. $mat^{m-1}+b(m+n)t^{m+n-1}$. 373. $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 374. $-\frac{\pi}{x^2}$. 375. $2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}-3x^{-4}$. 376. $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$. Indication. $y=x^2x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}$. 377. $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. 378. $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. 379. $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. 380. $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$. 381. $\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$. 382. $5\cos x-3\sin x$. 383. $\frac{4}{\sin^2 2x}$. 384. $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$. 385. $t^2\sin t$. 386. $y'=0$. 387. $\operatorname{ctg}x-\frac{x}{\sin^2 x}$. 388. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 389. $x\operatorname{arctg}x$. 390. $x^6e^x(x+7)$. 391. xe^x. 392. $e^x\frac{x-2}{x^3}$. 393. $\frac{5x^4-x^5}{e^x}$. 394. $e^x(\cos x-\sin x)$. 395. x^2e^x. 396. $e^x\left(\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. 397. $\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$. 398. $3x^2\ln x$. 399. $\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}$. 400. $\frac{2\ln x}{x\ln 10}-$ $-\frac{1}{x}$. 401. $\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x$. 402. $\frac{2x\operatorname{ch}x-x^2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}$. 403. $-\operatorname{th}^2 x$. 404. $\frac{-3(x\ln x+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x)}{x\ln^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 x}$. 405. $\frac{-2x^2}{1-x^4}$. 406. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arsh}x+$ $+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\arcsin x$. 407. $\frac{x-\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arch}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. 408. $\frac{1+2x\operatorname{Arcth}x}{(1-x^2)^2}$. 410. $\frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$. 411. $12ab+18b^2y$. 412. $16x(3+2x^2)^3$. 413. $\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$. 414. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. 415. $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+b^3)^2}}$. 416. $-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1}$. 418. $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. 419. $\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg}x}}$. 420. $2-15\cos^2 x\sin x$.

421. $\frac{-16\cos 2t}{\sin^3 2t}$. Indication. $x=\sin^{-2}t+\cos^{-2}t$.

422. $\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$. 423. $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$. 424. $\frac{3\cos x+2\sin x}{2\sqrt{15\sin x-10\cos x}}$.

425. $\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$. 426. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$.

427. $\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}-\frac{3(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$. 428. $\frac{-1}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$.

429. $\frac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$. 430. $\frac{2e^x-2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}}+\frac{5\ln^4 x}{x}$. 432. $(2x-5)\times$ $\times\cos(x^5-5x+1)-\frac{a}{x^2\cos^2\frac{a}{x}}$. 433. $-\alpha\sin(\alpha x+\beta)$. 434. $\sin(2t+\varphi)$.

435. $-2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$. 436. $\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{a}}$. 437. $x\cos 2x^2\sin 3x^2$. 438. Solution. $\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 439. $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$. 440. $\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

441. $\frac{-1}{1+x^2}$. 442. $\frac{-1}{1+x^2}$. 443. $-10xe^{-x^2}$. 444. $-2x5^{-x^2}\ln 5$.

445. $2x10^{2x}(1+x\ln 10)$. 446. $\sin 2^t+2^t t\cos 2^t\ln 2$. 447. $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

448. $\frac{2}{2x+7}$. 449. $\operatorname{ctg} x\lg e$. 450. $\frac{-2x}{1-x^2}$. 451. $\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x\ln x}$.

452. $\frac{(e^x+5\cos x)\sqrt{1-x^2}-4}{(e^x+5\sin x-4\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$. 453. $\frac{1}{(1+\ln^2 x)x}+$ $+\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. 454. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$. 455. Solution. $y'=(\sin^3 5x)'\cos^2\frac{x}{3}+\sin^3 5x\left(\cos^2\frac{x}{3}\right)'=3\sin^2 5x\cos 5x\,5\cos^2\frac{x}{3}+$ $+\sin^3 5x\,2\cos\frac{x}{3}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3}=15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\sin^3\times$ $\times 5x\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$. 456. $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$. 457. $\frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$. 458. $\frac{x^7}{(1-x^2)^5}$.

459. $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. 460. $\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. 461. $\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

462. $\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$. 463. $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$. 464. $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

465. $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$. 466. $\frac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$. 467. $\frac{x^3-1}{(x+2)^6}$.

468. $\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 469. $\frac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$.

470. $\frac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$. 471. $2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$. 472. $\frac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$.

473. $\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$. 474. $\sin^3 x\cos^2 x$. 475. $\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$. 476. $10\operatorname{tg}5x\sec^2 5x$.

477. $x\cos x^2$. 478. $3t^2\sin 2t^3$. 479. $3\cos x\cos 2x$. 480. $\operatorname{tg}^4 x$. 481. $\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}$.

482. $\frac{(\alpha-\beta)\sin 2x}{2\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}}$. 483. 0. 484. $\frac{1}{2}\frac{\arcsin x(2\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

485. $\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$. 486. $\frac{1}{1+x^2}$. 487. $\frac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$.

488. $\frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$. 489. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 490. $2\sqrt{a^2-x^2}$. 491. $\frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

492. $\arcsin\sqrt{x}$. 493. $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$. 494. $\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

495. $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos a+x^2}$. 496. $\frac{1}{5+4\sin x}$. 497. $4x\sqrt{\frac{x}{b-x}}$. 498. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$.

499. $\frac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$. 500. $\sin 2x\, e^{\sin^2 x}$. 501. $2m^2p(2ma^{mx}+b)^{p-1}a^{mx}\ln a$.

502. $e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)$. 503. $e^{\alpha x}\sin\beta x$. 504. $e^{-x}\cos 3x$.

505. $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2\ln a)$. 506. $-\frac{1}{2}y\operatorname{tg}x(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$.

507. $\frac{3\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\ln 3}{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}$. 508. $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$. 509. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. 510. $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

511. $\frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$. 512. $\frac{-2}{x\ln^3 x}$. 513. $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{x-1}{x}$. 514. $\frac{2x+11}{x^2-x-2}$.

Indication. $y=5\ln(x-2)-3\ln(x+1)$. 515. $\frac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

516. $\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$. 517. $\sqrt{x^2-a^2}$. 518. $\frac{-6x^2}{(3-2x^3)\ln(3-2x^3)}$.

519. $\frac{15a\ln^2(ax+b)}{ax+b}$. 520. $\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 521. $\frac{mx+n}{x^2-a^2}$. 522. $\sqrt{2}\sin\ln x$.

523. $\frac{1}{\sin^3 x}$. 524. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. 525. $\frac{x+1}{x^3-1}$. 526. $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\times$

$\times[2^{\arcsin 3x}\ln 2+2(1-\arccos 3x)]$. 527. $\left(3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\times$

$\times\frac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}$. 528. $\frac{1}{1+2\sin x}$. 529. $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

530. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 531. $-\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

532. $\frac{x^3}{x^4+x^3-2}$. 533. $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$. 534. $\frac{x^2-3x}{x^4-1}$. 535. $\frac{1}{1+x^3}$.
536. $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$. 537. $6\,\mathrm{sh}^2 2x\cdot\mathrm{ch}\,2x$. 538. $e^{\alpha x}(\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta x+\beta\,\mathrm{sh}\,\beta x)$.
539. $6\,\mathrm{th}^2 2x\,(1-\mathrm{th}^2 2x)$. 540. $2\,\mathrm{cth}\,2x$. 541. $\frac{2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$.
542. $\frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$. 543. $\frac{1}{\cos 2x}$. 544. $\frac{-1}{\sin x}$. 545. $\frac{2}{1-x^2}$.
546. $x\,\mathrm{Arth}\,x$. 547. $x\,\mathrm{Arsh}\,x$. 548. a) $y'=1$ pour $x>0$; $y'=-1$ pour $x<0$; $y'(0)$ n'existe pas; b) $y'=|2x|$. 549. $y'=\frac{1}{x}$.
550. $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{pour } x\leqslant 0,\\ -e^{-x} & \text{pour } x>0.\end{cases}$ 552. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$. 553. 6π.
554. a) $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; b) $f'_-(0)=\frac{2}{a}$, $f'_+(0)=\frac{-2}{a}$; c) $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$; d) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$; e) $f'_-(0)$ et $f'_+(0)$ n'existent pas. 555. $1-x$. 556. $2+\frac{x-3}{4}$. 557. -1. 558. 0. 561. Solution. On a $y'=e^{-x}(1-x)$. Puisque $e^{-x}=\frac{y}{x}$, alors $y'=\frac{y}{x}(1-x)$ ou $xy'=y(1-x)$. 566. $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$.
567. $-\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. 568. $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.
569. $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$. 570. $\frac{(x-2)^9(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-2)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^4}}$.
571. $-\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$. 572. $x^x(1+\ln x)$. 573. $x^{x^2+1}\times$
$\times(1+2\ln x)$. 574. $\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$. 575. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)$.
576. $x^{xx}x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$. 577. $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$.
578. $(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x-\sin x\,\mathrm{tg}\,x)$. 579. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\right.$
$\left.+\frac{1}{1+x}\right]$. 580. $(\mathrm{arctg}\,x)^x\left[\ln\mathrm{arctg}\,x+\frac{x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}\right]$. 581. a) $x'_y=$
$=\frac{1}{3(1+x^2)}$; b) $x'_y=\frac{2}{2-\cos x}$; c) $x'_y=\frac{10}{1+5e^{\frac{x}{2}}}$. 582. $\frac{3}{2}t^2$.
583. $\frac{t-1}{t+1}$. 584. $\frac{-2t}{1-t^2}$. 585. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. 586. $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. 587. $\frac{t+1}{t(t^2+1)}$.
588. $\mathrm{tg}\,t$. 589. $-\frac{b}{a}$. 590. $-\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,t$. 591. $-\mathrm{tg}\,3t$. 592. $y'_x=$
$=\begin{cases}-1 & \text{pour } t<0,\\ 1 & \text{pour } t>0.\end{cases}$ 593. $-2e^{3t}$. 594. $\mathrm{tg}\,t$. 596. 1. 597. ∞,

599. Non. 600. Oui, puisque l'égalité est une identité. 601. $\frac{2}{5}$.

602. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 603. $-\frac{x^2}{y^2}$. 604. $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. 605. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

606. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 607. $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. 608. $\frac{10}{10-3\cos y}$.

609. -1. 610. $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. 611. $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. 612. $(x+y)^2$.

613. $y'=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$. 614. $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$. 615. $\frac{y}{x-y}$. 616. $\frac{x+y}{x-y}$.

617. $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$. 618. $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\frac{y}{x}$. 620. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 0.

622. 45°; arctg 2 $\approx$ 63°26′. 623. 45°. 624. arctg $\frac{2}{e}\approx$ 36°21′. 625. (0; 20); (1; 15); (−2; −12). 626. (1; −3). 627. $y=x^2-x+1$. 628. $k=\frac{-1}{11}$.

629. $\left(\frac{1}{8};\ -\frac{1}{16}\right)$. 631. $y-5=0$; $x+2=0$. 632. $x-1=0$; $y=0$.

633. a) $y=2x$; $y=-\frac{1}{2}x$; b) $x-2y-1=0$; $2x+y-2=0$; c) $6x+2y-\pi=0$; $2x-6y+3\pi=0$, d) $y=x-1$; $y=1-x$; e) $2x+y-3=0$; $x-2y+1=0$ pour le point (1, 1); $2x-y+3+0$; $x+2y-1=0$ pour le point (−1, 1). 634. $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. 635. $y=0$; $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$. 636. $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$.

637. $x+y-2=0$. 638. Au point (1, 0); $y=2x-2$; $y=\frac{1-x}{2}$; au point (2, 0); $y=-x+2$; $y=x-2$ au point (3, 0); $y=2x-6$; $y=\frac{3-x}{2}$.

639. $14x-13y+12=0$; $13x+14y-41=0$. 640. Indication. L'équation de la tangente est $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. Par conséquent, la tangente coupe l'axe OX au point $A(2x_0, 0)$ et l'axe OY au point $B(0, 2y_0)$. En trouvant le milieu du segment AB, on obtient le point (x_0, y_0). 643. 40°36′. 644. Au point (0, 0) les paraboles sont tangentes, au point (1, 1) elles se coupent sous l'angle arctg $\frac{1}{7}\approx$8°8′.

647. $S_t=S_n=2$; $t=n=2\sqrt{2}$. 648. $\frac{1}{\ln 2}$. 652. $T=2a\sin\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $N=2a\sin\frac{t}{2}$; $S_t=2a\sin^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $S_n=a\sin t$. 653. arctg $\frac{1}{K}$.

654. $\frac{\pi}{2}+2\varphi$. 655. $S_t=4\pi^2a$; $S_n=a$; $t=2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; $n=a\sqrt{1+4\pi^2}$; $\operatorname{tg}\mu=2\pi$. 656. $S_t=a$; $S_n=\frac{a}{\varphi_0^2}$; $t=\sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $n=$

$=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $\operatorname{tg}\mu=-\varphi_0$. 657. 3 cm/s ; 0 ; -9 cm/s. 658. 15 cm/s. 659. $-\frac{3}{2}$ m/s. 660. L'équation de la trajectoire est $y=x\operatorname{tg}\alpha-$ $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$. La portée est $\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. La grandeur de la vitesse est $\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$; le coefficient angulaire du vecteur vitesse est $\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$. Indication. Pour déterminer la trajectoire, il faut éliminer le paramètre t dans le système donné. La portée est l'abscisse du point A (fig. 17). Les projections de la vitesse sur les axes sont: $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$. La grandeur de la vitesse est $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; le vecteur vitesse est dirigé suivant la tangente à la trajectoire. 661. Décroît avec une vitesse de 0,4. 662. $\left(\frac{9}{8},\frac{9}{2}\right)$. 663. La diagonale croît avec une vitesse $\sim 3{,}8$ cm/s, l'aire avec une vitesse de 40 cm²/s. 664. L'aire de la surface croît avec une vitesse de $0{,}2\pi$ m²/s, le volume avec une vitesse de $0{,}05\pi$ m³/s. 665. $\frac{\pi}{3}$ cm/s. 666. La masse de la tige entière est 360 g, sa densité au point M est $5x$ g/cm, la densité au point A est 0, la densité au point B est 60 g/cm. 667. $56x^6+210x^4$. 668. $e^{x^2}(4x^2+2)$. 669. $2\cos 2x$. 670. $\frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$. 671. $\frac{-x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. 672. $2\operatorname{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2}$. 673. $\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$. 674. $\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. 679. $y'''=6$. 680. $f'''(3)=$ $=4320$. 681. $y^{\mathrm{V}}=\frac{24}{(x+1)^5}$. 682. $y^{\mathrm{VI}}=-64\sin 2x$. 684. 0 ; 1 ; 2 ; 2. 685. La vitesse est $v=5$, 4,997 ; 4,7. L'accélération est $a=0$; $-0{,}006$; $-0{,}6$. 686. La loi du mouvement du point M_1 est $x=a\cos\omega t$; la vitesse à l'instant t est $-a\omega\sin\omega t$, l'accélération à l'instant t est : $-a\omega^2\times$ $\times\cos\omega t$. La vitesse initiale est nulle ; l'accélération initiale est $-a\omega^2$; la vitesse pour $x=0$ est $-a\omega$; l'accélération pour $x=0$ est nulle. La valeur maximale de la grandeur absolue de la vitesse est $a\omega$. La valeur maximale de la grandeur absolue de l'accélération est $a\omega^2$. 687. $y^{(n)}=n!\,a^n$. 688. a) $n!\,(1-x)^{-(n+1)}$, b) $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot x^{n-\frac{1}{2}}}$. 689. a) $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$; c) $(-3)^n e^{-3x}$; d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$;

e) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$; f) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; g) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$;

h) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$. 690. a) $x\cdot e^x+ne^x$; b) $2^{n-1}e^{-2x}\times$ $\times\left[2(-1)^n x^2+2n(-1)^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\right]$; c) $(1-x^2)\times$

$\times \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)-n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$; d) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}[x-(2n-1)]$; c) $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$ pour $n \geqslant 4$. 691. $y^{(n)}(0)=(n-1)!$ 692. a) $9t^3$; b) $2t^2+2$; c) $-\sqrt{1-t^2}$. 693. a) $\frac{-1}{a\sin^3 t}$; b) $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$; c) $\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; d) $\frac{-1}{at\sin^3 t}$.

694. a) 0; b) $2e^{3at}$. 695. a) $(1+t^2)(1+3t^2)$; b) $t\frac{1+t}{(1-t)^3}$.

696. $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}$. 697. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=0}=1$. 699. $\frac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\sin t}$.

700. $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$. 701. $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$. 702. $m^n t^m$.

703. $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$; $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$. 705. $-\frac{p^2}{y^3}$.

706. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. 707. $-\frac{2y^2+2}{y^5}$. 708. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(1-y)^3}$; $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{y^2}$.

709. $\frac{111}{256}$. 710. $-\frac{1}{16}$. 711. a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{3a^2x}{y^5}$. 712. $\Delta y=0{,}009001$; $dy=0{,}009$. 713. $d(1-x^3)=1$ pour $x=1$ et $\Delta x=-\frac{1}{3}$. 714. $dS=2x\cdot\Delta x$, $\Delta S=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$. 717. Pour $x=0$. 718. Non. 719. $dy=-\frac{\pi}{72}\approx-0{,}0436$. 720. $dy=\frac{1}{2700}\approx 0{,}00037$. 721. $dy=\frac{\pi}{45}\approx 0{,}0698$.

722. $\frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$. 723. $\frac{dx}{(1-x)^2}$. 724. $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 725. $\frac{a\,dx}{x^2+a^2}$.

726. $-2xe^{-x^2}dx$. 727. $\ln x\,dx$. 728. $\frac{-2dx}{1-x^2}$. 729. $-\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$.

730. $-\frac{e^t\,dt}{1+e^{2t}}$. 732. $-\frac{10x+8y}{7x+5y}dx$. 733. $\frac{-ye^{-\frac{x}{y}}dx}{y^2-xe^{-\frac{x}{y}}}=\frac{y}{x-y}dx$.

734. $\frac{x+y}{x-y}dx$. 735. $\frac{12}{11}dx$. 737. a) 0,485; b) 0,965; c) 1, 2; d) $-0{,}045$; e) $\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}81$. 738. 565 cm³. 739. $\sqrt{5}\approx 2{,}25$; $\sqrt{17}\approx 4{,}13$; $\sqrt{70}\approx 8{,}38$; $\sqrt{640}\approx 25{,}3$. 740. $\sqrt[3]{10}\approx 2{,}16$; $\sqrt[3]{70}\approx 4{,}13$; $\sqrt[3]{200}\approx 5{,}85$. 741. a) 5; b) 1, 1; c) 0,93; d) 0,9. 742. 1,0019. 743. 0,57. 744. 2,03. 748. $\frac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. 749. $\frac{-x(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$.

750. $\left(-\sin x\ln x+\frac{2\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)(dx)^2$. 751. $\frac{2\ln x-3}{x^3}(dx)^2$.

752. $-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$. 753. $\frac{384(dx)^4}{(2-x)^5}$. 754. $3\cdot 2^n\sin\Big(2x+5+$

$+\frac{n\pi}{2}\Big)(dx)^n$. 755. $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)\cdot(dx)^n$. 757. Non, puisque $f'(2)$ n'existe pas. 758. Non. Le point $x=\frac{\pi}{2}$ est un point de discontinuité pour la fonction. 762. $\xi=0$. 763. (2, 4). 765. a) $\xi=\frac{14}{9}$; b) $\xi=\frac{\pi}{4}$. 768. $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{2(x-1)^3}{3!\,\xi^3}$, où $\xi=1+$ $+\theta(x-1)$, $0<\theta<1$. 769. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\sin\xi_1$, où $\xi_1=\theta_1 x$, $0<\theta_1<1$; $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}\sin\xi_2$ où $\xi_2=\theta_2 x$, $0<\theta_2<1$. 770. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\xi}$, où $\xi=\theta x$, $0<$ $<\theta<1$. 772. L'erreur est : a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\xi)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\xi)^{8/3}}$; dans les deux cas $\xi=\theta x$; $0<\theta<1$. 773. L'erreur est inférieure à $\frac{3}{5!}=$ $=\frac{1}{40}$. 775. Solution. On a $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$. En développant les deux facteurs suivant les puissances de x, on trouve $\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}$; $\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+$ $+\frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}$. En multipliant, on a $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\approx 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}$. Ensuite, on trouve en développant $e^{\frac{x}{a}}$ suivant les puissances de $\frac{x}{a}$ le même polynôme $e^{\frac{x}{a}}\approx 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}$. 777. $-\frac{1}{3}$. 778. ∞. 779. 1. 780. 3. 781. $\frac{1}{2}$. 782. 5. 783. ∞. 784. 0. 785. $\frac{\pi^2}{2}$. 786. 1. 788. $\frac{2}{\pi}$. 789. 1. 790. 0. 791. a. 792. ∞ pour $n>1$; a pour $n=1$; 0 pour $n<1$. 793. 0. 795. $\frac{1}{5}$. 796. $\frac{1}{12}$. 797. -1. 799. 1. 800. e^3. 801. 1. 802. 1. 803. 1. 804. $\frac{1}{e}$. 805. $\frac{1}{e}$. 806. $\frac{1}{e}$. 807. 1. 808. 1. 810. Indication. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{S}{\frac{2}{3}bh}$, où $S=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$ est l'expression exacte de l'aire du segment (R est le rayon du cercle correspondant).

Chapitre III

811. $(-\infty, -2)$ est croissante ; $(-2, \infty)$ est décroissante. 812. $(-\infty, 2)$ est décroissante ; $(2, \infty)$ est croissante. 813. $(-\infty, \infty)$ est croissante. 814. $(-\infty, 0)$ et $(2, \infty)$ est croissante, $(0, 2)$ est décroissante. 815. $(-\infty, 2)$ et $(2, \infty)$ décroissante. 816. $(-\infty, 1)$ croît ; $(1, \infty)$ décroît. 817. $(-\infty, -2)$, $(-2, 8)$ et $(8, \infty)$ décroît. 818. $(0, 1)$ décroît ; $(1, \infty)$ croît. 819. $(-\infty, -1)$ et $(1, \infty)$ croît ; $(-1, 1)$ décroît. 820. $(-\infty, \infty)$ croît. 821. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ décroît ; $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ croît. 822. $(-2, 0)$ croît. 823. $(-\infty, 2)$ décroît ; $(2, \infty)$ croît. 824. $(-\infty, a)$ et (a, ∞) décroît. 825. $(-\infty, 0)$ et $(0, 1)$ décroît ; $(1, \infty)$ croît. 827. $y_{\max} = \frac{9}{4}$ pour $x = \frac{1}{2}$. 828. Il n'y a pas d'extrémum. 830. $y_{\min} = 0$ pour $x = 0$; $y_{\min} = 0$ pour $x = 12$; $y_{\max} = 1296$ pour $x = 6$. 831. $y_{\min} \approx -0{,}76$ pour $x \approx 0{,}23$; $y_{\max} = 0$ pour $x = 1$; $y_{\min} \approx -0{,}05$ pour $x \approx 1{,}43$. Pour $x = 2$ il n'y a pas d'extrémum. 832. Il n'y a pas d'extrémum. 833. $y_{\max} = -2$ pour $x = 0$; $y_{\min} = 2$ pour $x = 2$. 834. $y_{\max} = \frac{9}{16}$ pour $x = 3{,}2$. 835. $y_{\max} = -3\sqrt{3}$ pour $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $y_{\min} = 3\sqrt{3}$ pour $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. 836. $y_{\max} = \sqrt{2}$ pour $x = 0$. 837. $y_{\max} = -\sqrt{3}$ pour $x = -2\sqrt{3}$; $y_{\min} = \sqrt{3}$ pour $x = 2\sqrt{3}$. 838. $y_{\min} = 0$ pour $x = \pm 1$; $y_{\max} = 1$ pour $x = 0$. 839. $y_{\min} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ pour $x = \left(k - \frac{1}{6}\right)\pi$; $y_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ pour $x = \left(k + \frac{1}{6}\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 840. $y_{\max} = 5$ pour $x = 12\,k\pi$; $y_{\max} = 5\cos\frac{2\pi}{5}$ pour $x = 12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = -5\cos\frac{\pi}{5}$ pour $x = 12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = 1$ pour $x = 6(2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 841. $y_{\min} = 0$ pour $x = 0$. 842. $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ pour $x = \frac{1}{e}$. 843. $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ pour $x = \frac{1}{e^2}$; $y_{\min} = 0$ pour $x = 1$. 844. $y_{\min} = 1$ pour $x = 0$. 845. $y_{\min} = -\frac{1}{e}$ pour $x = -1$. 846. $y_{\min} = 0$ pour $x = 0$; $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ pour $x = 2$. 847. $y_{\min} = e$ pour $x = 1$. 848. Il n'y a pas d'extrémum. 849. La plus petite valeur est $m = -\frac{1}{2}$ pour $x = -1$. La plus grande valeur est $M = \frac{1}{2}$ pour $x = 1$. 850. $m = 0$, pour $x = 0$ et $x = 10$; $M = 5$ pour $x = 5$. 851. $m = \frac{1}{2}$ pour $x =$

$=(2k+1)\frac{\pi}{4}$; $M=1$ pour $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. 852. $m=0$ pour $x=1$, $M=\pi$ pour $x=-1$. 853. $m=-1$ pour $x=-1$; $M=27$ pour $x=3$. 854. a) $m=-6$ pour $x=1$; $M=266$ pour $x=5$; b) $m=-1579$ pour $x=-10$; $M=3745$ pour $x=12$. 856. $p=-2$, $q=4$. 861. Chaque terme doit être égal à $\frac{a}{2}$. 862. Le rectangle doit être un carré de côté $\frac{l}{4}$. 863. Isocèle. 864. Le côté de la plate-forme adjacent au mur doit être deux fois plus grand que l'autre côté. 865. Le côté du carré découpé doit être égal à $\frac{a}{6}$. 866. La hauteur doit être deux fois plus petite que le côté de la base. 867. Celui dont la hauteur est égale au diamètre de la base. 868. La hauteur du cylindre est $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, le rayon de sa base est $R\sqrt{\frac{2}{3}}$, où R est le rayon de la sphère donnée. 869. La hauteur du cylindre est $R\sqrt{2}$, où R est le rayon de la sphère. 870. La hauteur du cône est $\frac{4}{3}R$, où R est le rayon de la sphère. 871. La hauteur du cône est $\frac{4}{3}R$, où R est le rayon de la sphère. 872. Le rayon de la base du cône $\frac{3}{2}r$, où r est le rayon de la base du cylindre donné. 873. Celui dont la hauteur est deux fois plus grande que le diamètre de la sphère. 874. $\varphi=\pi$, c'est-à-dire la section de la gouttière est un demi-cercle. 875. L'angle au centre du secteur est $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 876. La hauteur de la partie cylindrique doit être nulle, c'est-à-dire le récipient doit avoir la forme d'une demi-sphère. 877. $h=(l^{2/3}-d^{2/3})^{3/2}$. 878. $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. 879. Les côtés du rectangle sont $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$, où a et b sont les demi-axes de l'ellipse. 880. Les coordonnées des sommets du rectangle se trouvant sur la parabole sont $\left(\frac{2}{3}a, \pm 2\sqrt{\frac{pa}{3}}\right)$. 881. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$. 882. L'angle est égal au plus grand des nombres arccos $\frac{1}{k}$ et arctg $\frac{h}{d}$. 883. $AM=a\cdot\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$. 884. $\frac{r}{\sqrt{2}}$. 885. a) $x=y=\frac{d}{\sqrt{2}}$; b) $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$; $y=d\sqrt{\frac{2}{3}}$. 886. $x=\sqrt{\frac{2aQ}{q}}$; $P_{\min}=$

$=\sqrt{2aqQ}$. 887. $\sqrt{Mm}$. Indication. Lors du choc parfaitement élastique des deux boules la vitesse acquise par la boule fixe de masse m_1 après avoir été percutée par la boule de masse m_2 qui se déplace à la vitesse v est $\frac{2m_2v}{m_1+m_2}$. 888. $n=\sqrt{\frac{NR}{r}}$ (si ce nombre n'est pas entier ou n'est pas un diviseur de N, on prend le nombre entier diviseur de N immédiatement voisin de la valeur trouvée). Puisque la résistance intérieure de la batterie est $\frac{n^2r}{N}$, le sens physique de la solution trouvée est le suivant: la résistance intérieure de la batterie doit être autant que possible voisine de la résistance extérieure. 889. $y=\frac{2}{3}h$. 891. $(-\infty, 2)$ la concavité est tournée vers les y négatifs, $(2, \infty)$ la concavité est tournée vers les y positifs; $M(2, 12)$ est un point d'inflexion. 892. $(-\infty, \infty)$ la concavité est tournée vers les y positifs. 893. $(-\infty, -3)$ la concavité est tournée vers les y négatifs, $(-3, \infty)$ la concavité est tournée vers les y positifs; il n'y a pas de point d'inflexion. 894. $(-\infty, -6)$ et $(0, 6)$ la concavité est tournée vers les y positifs, $(-6, 0)$ et $(6, \infty)$ la concavité est tournée vers les y négatifs; les points d'inflexion sont $M_1\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$, $O(0, 0)$, $M_2\left(6, \frac{9}{2}\right)$. 895. La concavité est tournée vers les y positifs sur $(-\infty, -\sqrt{3})$ et $(0, \sqrt{3})$; la concavité est tournée vers les y négatifs sur $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, \infty)$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm\sqrt{3}, 0)$ et $O(0, 0)$. 896. La concavité est tournée vers les y positifs sur $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$; la concavité est tournée vers les y négatifs sur $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les points d'inflexion sont $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}; 0\right)$. 897. La concavité est tournée vers les y positifs sur $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, la concavité est tournée vers les y négatifs sur $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les abscisses des points d'inflexion sont $x=k\pi$. 898. La concavité est tournée vers les y négatifs sur $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, la concavité est tournée vers les y positifs sur $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty\right)$; le point d'inflexion est $M\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$. 899. La concavité est tournée vers les y positifs sur $(-\infty, 0)$, la concavité est tournée vers les y négatifs sur $(0, \infty)$; le point d'inflexion est $O(0, 0)$. 900. Sur $(-\infty, -3)$ et sur $(-1, \infty)$ la concavité est tournée vers les y positifs, sur $(-3, -1)$ la concavité est tournée vers les y négatifs; les points d'inflexion sont $M_1\left(-3, \frac{10}{e^3}\right)$ et $M_2\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.

901. $x=2$, $y=0$. **902.** $x=1$, $x=3$, $y=0$. **903.** $x=\pm 2$, $y=1$. **904.** $y=x$. **905.** $y=-x$ est une asymptote à gauche, $y=x$ une asymptote à droite. **906.** $y=-1$ est une asymptote à gauche, $y=1$ une asymptote à droite. **907.** $x=\pm 1$, $y=-x$ est une asymptote à gauche, $y=x$ une asymptote à droite. **908.** $y=-2$ est une asymptote à gauche, $y=2x-2$ une asymptote à droite. **909.** $y=2$. **910.** $x=0$, $y=1$ est une asymptote à gauche, $y=0$ une asymptote à droite. **911.** $x=0$, $y=1$. **912.** $y=0$. **913.** $x=-1$. **914.** $y=x-\pi$ est une asymptote à gauche; $y=x+\pi$ une asymptote à droite. **915.** $y=a$. **916.** $y_{\max}=0$ pour $x=0$; $y_{\min}=-4$ pour $x=2$; le point d'inflexion est $M_1(1, -2)$. **917.** $y_{\max}=1$ pour $x=\pm\sqrt{3}$; $y_{\min}=0$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}\left(\pm 1, \frac{5}{9}\right)$. **918.** $y_{\max}=4$ pour $x=-1$; $y_{\min}=0$ pour $x=1$; le point d'inflexion est $M_1(0, 2)$. **919.** $y_{\max}=8$ pour $x=-2$; $y_{\min}=0$ pour $x=2$; le point d'inflexion est $M(0, 4)$. **920.** $y_{\min}=-1$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm\sqrt{5}, 0)$ et $M_{3,4}\left(\pm 1, -\frac{64}{125}\right)$. **921.** $y_{\max}=-2$ pour $x=0$; $y_{\min}=2$ pour $x=2$; les asymptotes sont $x=1$, $y=x-1$. **922.** Les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm 1, \mp 2)$; l'asymptote est $x=0$. **923.** $y_{\max}=-4$ pour $x=-1$; $y_{\min}=4$ pour $x=1$; l'asymptote est $x=0$. **924.** $y_{\min}=3$ pour $x=1$; le point d'inflexion est $M(-\sqrt[3]{2}, 0)$; l'asymptote est $x=0$. **925.** $y_{\max}=\frac{1}{3}$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}\left(\pm 1, \frac{1}{4}\right)$; l'asymptote est $y=0$. **926.** $y_{\max}=-2$ pour $x=0$; les asymptotes sont $x=\pm 2$ et $y=0$. **927.** $y_{\min}=-1$ pour $x=-1$; $y_{\max}=1$ pour $x=1$, les points d'inflexion sont $O(0, 0)$ et $M_{1,2}\left(\pm 2\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; l'asymptote est $y=0$. **928.** $y_{\max}=1$ pour $x=4$; le point d'inflexion est $M\left(5, \frac{8}{9}\right)$; les asymptotes sont $x=2$ et $y=0$. **929.** Le point d'inflexion est $O(0, 0)$; les asymptotes sont $x=\pm 2$ et $y=0$. **930.** $y_{\max}=-\frac{27}{16}$ pour $x=\frac{8}{3}$; les asymptotes sont $x=0$, $x=4$ et $y=0$. **931.** $y_{\max}=-4$ pour $x=-1$; $y_{\min}=4$ pour $x=1$; les asymptotes sont $x=0$ et $y=3x$. **932.** Les extrémités sont $A(0, 2)$ et $B(4, 2)$; $y_{\max}=2\sqrt{2}$ pour $x=2$. **933.** $A(-8, -4)$ et $B(8, 4)$ sont les extrémités. Le point d'inflexion est $O(0, 0)$. **934.** L'extrémité est $A(-3, 0)$; $y_{\min}=-2$ pour $x=-2$. **935.** Les extrémités sont $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$ et $B(\sqrt{3}, 0)$; $y_{\max}=\sqrt{2}$ pour $x=-1$; le point d'inflexion est $M\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}}, \sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$. **936.** $y_{\max}=1$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm 1, 0)$. **937.** Les points d'inflexion sont $M_1(0, 1)$ et $M_2(1, 0)$; l'asymptote

est $y=-x$. 938. $y_{max}=0$ pour $x=-1$; $y_{min}=-1$ (pour $x=0$). 939. $y_{max}=2$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm 1, \sqrt[3]{2})$; l'asymptote est $y=0$. 940. $y_{min}=-4$ pour $x=-4$; $y_{max}=4$ pour $x=4$; le point d'inflexion est $O(0, 0)$; l'asymptote est $y=0$. 941. $y_{min}=\sqrt[3]{4}$ pour $x=2$, $y_{min}=\sqrt[3]{4}$ pour $x=4$; $y_{max}=2$ pour $x=3$. 942. $y_{min}=2$ pour $x=0$; les asymptotes sont $x=\pm 2$. 943. Les asymptotes sont $x=\pm 2$ et $y=0$. 944. $y_{min}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ pour $x=\sqrt{3}$; $y_{max}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ pour $x=-\sqrt{3}$; les points d'inflexion sont $M_1\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$, $O(0, 0)$ et $M_2\left(3, \frac{3}{2}\right)$; les asymptotes sont $x=\pm 1$. 945. $y_{min}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ pour $x=6$; le point d'inflexion est $M\left(12, \frac{12}{\sqrt[3]{100}}\right)$; l'asymptote est $x=2$. 946. $y_{max}=\frac{1}{e}$ pour $x=1$; le point d'inflexion est $M\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$; l'asymptote est $y=0$. 947. Les points d'inflexion sont $M_1\left(-3a, \frac{10a}{e^3}\right)$ et $M_2\left(-a, \frac{2a}{e}\right)$; l'asymptote est $y=0$. 948. $y_{max}=e^2$ pour $x=4$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}\left(\frac{8\pm 2\sqrt{2}}{2}, e^{3/2}\right)$; l'asymptote est $y=0$. 949. $y_{max}=2$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}\left(\pm 1, \frac{3}{e}\right)$. 950. $y_{max}=1$ pour $x=\pm 1$; $y_{min}=0$ pour $x=0$. 951. $y_{max}=0{,}74$ pour $x=e^2\approx 7{,}39$; le point d'inflexion est $M(e^{8/3}\approx 14{,}39;\ 0{,}70)$; les asymptotes sont $x=0$ et $y=0$. 952. $y_{min}=-\frac{a^2}{4e}$ pour $x=\frac{a}{\sqrt{e}}$; le point d'inflexion est $M\left(\frac{a}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3a^2}{4e^3}\right)$. 953. $y_{min}=e$ pour $x=e$; le point d'inflexion est $M\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$; l'asymptote est $x=1$; $y\to 0$ pour $x\to 0$. 954. $y_{max}=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}54$ pour $x=\frac{1}{e^2}-1\approx -0{,}86$; $y_{min}=0$ pour $x=0$; le point d'inflexion est $M\left(\frac{1}{e}-1\approx -0{,}63, \frac{1}{e}\approx 0{,}37\right)$; $y\to 0$ pour $x\to -1+0$ (point extrême limite). 955. $y_{min}=1$ pour $x=\pm\sqrt{2}$; les points d'infexion sont $M_{1,2}(\pm 1{,}89;\ 1{,}33)$; les asymptotes sont $x=\pm 1$. 956. L'asymptote est $y=0$. 957. Les asymptotes sont $y=0$ (pour $x\to +\infty$) et $y=-x$ (pour $x\to -\infty$).

958. Les asymptotes sont $x=-\frac{1}{e}$; $x=0$; $y=1$; la fonction n'est pas définie sur le segment $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. 959. La fonction est périodique de période 2π. $y_{\min}=-\sqrt{2}$ pour $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$; $y_{\max}=\sqrt{2}$ pour $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les points d'inflexion sont $M_k\left(\frac{3}{4}\pi+k\pi, 0\right)$. 960. La fonction est périodique de période 2π. $y_{\min}=-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ pour $x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$; $y_{\max}=$ $=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ pour $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$; les points d'inflexion sont $M_k(k\pi, 0)$ et $N_k\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi; \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$. 961. La fonction est périodique de période 2π. Sur le segment $[-\pi, \pi]$ $y_{\max}=\frac{1}{4}$ pour $x=\pm\frac{\pi}{3}$; $y_{\min}=-2$ pour $x=\pm\pi$; $y_{\min}=0$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm 0{,}57, 0{,}13)$ et $M_{3,4}(\pm 2{,}20, 0{,}95)$. 962. La fonction est périodique impaire de période 2π. Sur le segment $[0, 2\pi]$ $y_{\max}=1$ pour $x=0$; $y_{\min}=$ $=0{,}71$ pour $x=\frac{\pi}{4}$; $y_{\max}=1$ pour $x=\frac{\pi}{2}$; $y_{\min}=-1$ pour $x=\pi$; $y_{\max}=-0{,}71$ pour $x=\frac{5}{4}\pi$; $y_{\min}=-1$ pour $x=\frac{3}{2}\pi$; $y_{\max}=1$ pour $x=2\pi$; les points d'inflexion sont $M_1(0{,}36, 0{,}86)$; $M_2(1{,}21, 0{,}86)$; $M_3(2{,}36, 0)$; $M_4(3{,}51, -0{,}86)$; $M_5(4{,}35, -0{,}86)$; $M_6(5{,}50, 0)$. 963. La fonction est périodique de période 2π. $y_{\min}=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $y_{\max}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les asymptotes sont $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$. 964. La fonction est périodique de période π; les points d'inflexion sont $M_k\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les asymptotes sont $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$. 965. La fonction est périodique paire de période 2π. Sur le segment $[0, \pi]$ $y_{\max}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$ pour $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{\max}=0$ pour $x=\pi$; $y_{\min}=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$ pour $x=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $y_{\min}=0$ pour $x=0$; les points d'inflexion sont $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

$M_2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3};\ \frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$; $M_3\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3};\ -\frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$.
966. La fonction est périodique paire de période 2π. Sur le segment $[0, \pi]$ $y_{\max}=1$ pour $x=0$; $y_{\max}=\frac{2}{3\sqrt{6}}$ pour $x=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $y_{\min}=-\frac{2}{3\sqrt{6}}$ pour $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y_{\min}=-1$ pour $x=\pi$; les points d'inflexion sont $M_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $M_2\left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}, \frac{4}{9}\times\right.$ $\left.\times\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$, $M_3\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right), -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$. **967.** La fonction est impaire. Les points d'inflexion sont $M_k(k\pi, k\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **968.** La fonction est paire. Les extrémités sont $A_{1,2}(\pm 2{,}83, -1{,}57)$. $y_{\max}=1{,}57$ pour $x=0$ (point de rebroussement); les points d'inflexion sont $M_{1,2}(\pm 1{,}54, -0{,}34)$. **969.** La fonction est impaire. Les points limites du graphique sont $(-1, -\infty)$ et $(1, +\infty)$. Le point d'inflexion est $O(0, 0)$; les asymptotes sont $x=\pm 1$. **970.** La fonction est impaire. $y_{\max}=\frac{\pi}{2}-$ $-1+2k\pi$ pour $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $y_{\min}=\frac{3}{2}\pi+1+2k\pi$ pour $x=$ $=\frac{3}{4}\pi+k\pi$; les points d'inflexion sont $M_k=(k\pi; 2k\pi)$; les asymptotes sont $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **971.** La fonction est paire. $y_{\min}=0$ pour $x=0$; les asymptotes sont $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (pour $x\to-\infty$) et $y=\frac{\pi}{2}x-1$ (pour $x\to+\infty$). **972.** $y_{\min}=0$ pour $x=0$ (point anguleux); l'asymptote est $y=1$. **973.** $y_{\min}=1+\frac{\pi}{2}$ pour $x=1$; $y_{\max}=\frac{3\pi}{2}-1$ pour $x=-1$; le point d'inflexion est $(0, \pi)$ (centre de symétrie); les asymptotes sont $y=x+2\pi$ (asymptote à gauche) et $y=x$ (asymptote à droite). **974.** La fonction est impaire. $y_{\min}=1{,}285$ pour $x=1$; $y_{\max}=1{,}856$ pour $x=-1$; le point d'inflexion est $M\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; les asymptotes sont $y=\frac{x}{2}+\pi$ (pour $x\to-\infty$) et $y=\frac{x}{2}$ (pour $x\to+\infty$). **975.** Les asymptotes sont $x=0$ et $y=x-\ln 2$. **976.** $y_{\min}=1{,}32$ pour $x=\pm 1$; l'asymptote est $x=0$. **977.** La fonction est périodique de période 2π. $y_{\min}=\frac{1}{6}$ pour $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$; $y_{\max}=e$ pour $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,$

$\pm 1, \pm 2, \ldots)$; les points d'inflexion sont $M_k\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\right.$ $\left.+2k\pi\,;\ e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ et $N_k\left(-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(2k+1)\pi\,;\ e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$.

978. Les extrémités sont $A(0,\ 1)$ et $B(1,\ 4{,}81)$. Le point d'inflexion est $M(0{,}28,\ 1{,}74)$. **979.** Les points d'inflexion sont $M(0{,}5,\ 1{,}59)$; les asymptotes sont $y=0{,}21$ (pour $x\to-\infty$) et $y=4{,}81$ (pour $x\to+\infty$). **980.** Le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des intervalles ouverts $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$, où $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. La fonction est périodique de période 2π. $y_{\max}=0$ pour $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; les asymptotes sont $x=k\pi$. **981.** Le domaine de définition est l'ensemble des intervalles ouverts $\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi,\ (2k+1)\pi\right)$, où k est un nombre entier. La fonction est périodique de période 2π. Les points d'inflexion sont $M_k(2k\pi,\ 0)$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; les asymptotes sont $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **982.** Le domaine d'existence est $x>0$; la fonction est monotone croissante ; l'asymptote est $x=0$. **983.** Le domaine d'existence est $|x-2k\pi|<$ $<\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. La fonction est périodique de période 2π. $y_{\min}=1$ pour $x=2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$; les asymptotes sont $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **984.** L'asymptote est $y=1{,}57$, $y\to-1{,}57$ pour $x\to 0$ (point extrême limite). **985.** Les points extrêmes sont $A_{1,2}(\pm 1{,}31,\ 1{,}57)$; $y_{\min}=0$ pour $x=0$. **986.** $y_{\min}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}69$ pour $x=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$; $y\to 1$ pour $x\to+0$. **987.** Le point extrême limite est $A(+0,\ 0)$; $y_{\max}=e^{\frac{1}{e}}\approx 1{,}44$ pour $x=e\approx 2{,}72$; l'asymptote est $y=1$; les points d'inflexion sont $M_1(0{,}58,\ 0{,}12)$ et $M_2(4{,}35,\ 1{,}40)$. **988.** $x_{\min}=-1$ pour $t=1$ $(y=3)$, $y_{\min}=-1$ pour $t=-1$ $(x=3)$. **989.** Pour tracer le graphique, il suffit de faire varier t de 0 à 2π. $x_{\min}=-a$ pour $t=\pi$ $(y=0)$; $x_{\max}=a$ pour $t=0$ $(y=0)$; $y_{\min}=-a$ (point de rebroussement) pour $t=\frac{3\pi}{2}$ $(x=0)$; $y_{\max}=+a$ (point de rebroussement) pour $t=\frac{\pi}{2}$ $(x=0)$; les points d'inflexion correspondent aux valeurs $t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},$ $\frac{7\pi}{4},\ \left(x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. **990.** $x_{\min}=-\frac{1}{e}$ pour $t=-1$

$(y=-e)$; $y_{\max}=\frac{1}{e}$ pour $t=1$ $(x=e)$; les points d'inflexion correspondent à $t=-\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\left(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}, -\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}\right)$ et $t=$ $=\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$; les asymptotes sont $x=0$ et $y=0$. **991.** $x_{\min}=1$ et $y_{\min}=1$ pour $t=0$ (point de rebroussement); l'asymptote est $y=2x$ pour $t\to+\infty$. **992.** $y_{\min}=0$ pour $t=0$. **993.** $ds=\frac{a}{y}\,dx$, $\cos\alpha=\frac{y}{a}$; $\sin\alpha=-\frac{x}{a}$. **994.** $ds=\frac{1}{a}\times$ $\times\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$; $\sin\alpha=-\frac{bx}{\sqrt{a^2-c^2x^2}}$, où $c=\sqrt{a^2-b^2}$. **995.** $ds=\frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}$; $\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$. **996.** $ds=\sqrt[3]{\frac{a}{x}}\,dx$; $\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$; $\sin\alpha=-\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. **997.** $ds=\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$; $\cos\alpha=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}$; $\sin\alpha=\operatorname{th}\frac{x}{a}$.

998. $ds=2a\sin\frac{t}{2}\,dt$; $\cos\alpha=\sin\frac{t}{2}$; $\sin\alpha=\cos\frac{t}{2}$. **999.** $ds=3a\times$ $\times\sin t\cos t\,dt$; $\cos\alpha=-\cos t$; $\sin\alpha=\sin t$. **1000.** $ds=a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1001.** $ds=\frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1002.** $ds=\frac{a}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi$; $\sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$. **1003.** $ds=a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$; $\sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$. **1004.** $ds=r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\varphi$; $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$. **1005.** $ds=\frac{a^2}{r}\,d\varphi$; $\sin\beta=\cos 2\varphi$. **1006.** $K=36$. **1007.** $K=\frac{1}{3\sqrt{2}}$. **1008.** $K_A=\frac{a}{b^2}$; $K_B=\frac{b}{a^2}$. **1009.** $K=\frac{6}{13\sqrt{13}}$. **1010.** $K=\frac{3}{a\sqrt{2}}$ aux deux sommets. **1011.** $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$ et $\left(\frac{9}{8}, -3\right)$. **1012.** $\left(-\frac{\ln 2}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **1013.** $R=\left|\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{6x}\right|$. **1014.** $R=\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$. **1015.** $R=\left|\frac{(y^2+1)^2}{4y}\right|$. **1016.** $R=\left|\frac{3}{2}\,a\sin 2t\right|$. **1017.** $R=|at|$.

1018. $R=|r\sqrt{1+k^2}|$. 1019. $R=\left|\frac{4}{3}a\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. 1020. $R_{\min}=|p|$. 1022. (2 ; 2). 1023. $\left(-\frac{11}{2}a;\ \frac{16}{3}a\right)$. 1024. $(x-3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=$ $=\frac{1}{4}$. 1025. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$. 1026. $pY^2=\frac{8}{27}(X-p)^3$ (parabole semi-cubique). 1027. $(aX)^{2/3}+(bY)^{2/3}=c^{4/3}$, où $c^2=a^2-b^2$.

Chapitre IV

Pour abréger, nous omettrons la constante arbitraire additive C dans les réponses de ce chapitre.

1031. $\frac{5}{7}a^2x^7$. 1032. $2x^3+4x^2+3x$. 1033. $\frac{x^4}{4}+\frac{(a+b)x^3}{3}+\frac{abx^2}{2}$. 1034. $a^2x+\frac{abx^4}{2}+\frac{b^2x^7}{7}$. 1035. $\frac{2x}{3}\sqrt{2px}$. 1036. $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$. 1037. $\sqrt[n]{nx}$. 1038. $a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}$. 1039. $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x$. 1040. $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13}-\frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7}-6\sqrt[3]{x}$. 1041. $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$. 1042. $2a\sqrt{ax}-4ax+4x\sqrt{ax}-2x^2+\frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$. 1043. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}$. 1044. $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|$. 1045. $\ln(x+\sqrt{4+x^2})$. 1046. $\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}$. 1047. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})$. 1048*. a) $\operatorname{tg}x-x$. Indication. Poser $\operatorname{tg}^2x=\sec^2x-1$; b) $x-\operatorname{th}x$. Indication. Poser $\operatorname{th}^2x=$ $=1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$. 1049. a) $-\operatorname{ctg}x-x$; b) $x-\operatorname{cth}x$. 1050. $\frac{(3e)^x}{\ln 3+1}$. 1051. $a\ln\left|\frac{c}{a-x}\right|$. Solution. $\int\frac{a}{a-x}dx=-a\int\frac{d(a-x)}{a-x}=-a\ln|a-$ $-x|+a\ln c=a\ln\left|\frac{c}{a-x}\right|$. 1052. $x+\ln|2x+1|$. Solution. Après avoir divisé le numérateur par le dénominateur, on a $\frac{2x+3}{2x+1}=1+$ $+\frac{2}{2x+1}$. D'où $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int dx+\int\frac{2dx}{2x+1}=x+\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=$ $=x+\ln|2x+1|$. 1053. $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}\ln|3+2x|$. 1054. $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\times$ $\times\ln|a+bx|$. 1055. $\frac{a}{\alpha}x+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x+\beta|$. 1056. $\frac{x^2}{2}+x+$

$+2\ln|x-1|$. 1057. $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+3|$. 1058. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+$ $+3\ln|x-1|$. 1059. $a^2x+2ab\ln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}$. 1060. $\ln|x+1|+$ $+\frac{1}{x+1}$. Indication. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}\,dx=$ $=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$. 1061. $-2b\sqrt{1-y}$. 1062. $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$. 1063. $\sqrt{x^2+1}$. Solution. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$. 1064. $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}$. 1065. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}x\sqrt{\frac{3}{5}}$. 1066. $\frac{1}{4\sqrt{14}}\times$ $\times\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|$. 1067. $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|$. 1068. $x-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. 1069. $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|\right)$. 1070. $x-$ $-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. 1071. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}x+\sqrt{7+8x^2})$. 1072. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin x\sqrt{\frac{5}{7}}$. 1073. $\frac{1}{3}\ln|3x^2-2|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$. 1074. $\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}\,x-\frac{1}{5}\ln(5x^2+7)$. 1075. $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\times$ $\times\ln(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1})$. 1076. $\sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. 1077. $\frac{1}{2}\ln|x^2-5|$. 1078. $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)$. 1079. $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{ax}{b}$. 1080. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}$. 1081. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. 1082. $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}|$. 1083. $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$. 1084. $\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)^2}{4}$. 1085. $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)-$ $-\frac{\sqrt{(\operatorname{arctg}2x)^3}}{3}$. 1086. $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$. 1087. $-\frac{a}{m}e^{-mx}$. 1088. $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}$. 1089. e^l+e^{-l}. 1090. $\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}$. 1091. $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x$. 1092. $\frac{2}{3\ln a}\sqrt{a^{3x}}+\frac{2}{\ln a\sqrt{a^x}}$. 1093. $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}$. 1094. $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2}$. 1095. $-e^{\frac{1}{x}}$. 1096. $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}$. 1097. $\ln\times$

$\times |e^x-1|$. 1098. $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}$. 1099. $\frac{3a}{4}(e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{4}{3}}$. 1100. $\frac{x}{3}-$ $-\frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x+3)$. Indication. $\frac{1}{2^x+3}\equiv\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^x}{2^x+3}\right)$. 1101. $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)$. 1102. $-\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$. 1103. $\arcsin e^t$. 1104. $-\frac{1}{b}\cos(a+bx)$. 1105. $\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$. 1106. $x-\frac{1}{2a}\cos 2ax$. 1107. $2\sin\times$ $\times\sqrt{x}$. 1108. $-\ln 10\cdot\cos(\lg x)$. 1109. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$. Indication. Poser $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. 1110. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$. Indication. Voir pour indication problème 1109. 1111. $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)$. 1112. $-\frac{\operatorname{ctg} ax}{a}-x$. 1113. $a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2a}\right|$. 1114. $\frac{1}{15}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. 1115. $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}\right|$. 1116. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2)$. 1117. $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)$. 1118. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg} x\sqrt{2}-$ $-\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$. 1119. $-\ln|\cos x|$. 1120. $\ln|\sin x|$. 1121. $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|$. 1122. $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|$. 1123. $-2\ln|\cos\sqrt{x}|$. 1124. $\frac{1}{2}\ln|\sin(x^2+1)|$. 1125. $\ln|\operatorname{tg} x|$. 1126. $\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{2}$. 1127. $\frac{\sin^4 6x}{24}$. 1128. $-\frac{1}{4a\sin^4 ax}$. 1129. $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)$. 1130. $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$. 1131. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}$. 1132. $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{3}$. 1133. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$. 1134. $-\frac{3\operatorname{ctg}^{\frac{5}{3}} x}{5}$. 1135. $\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg} 3x+\frac{1}{\cos 3x}\right)$. 1136. $\frac{1}{a}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|+\right.$ $\left.+2\sin ax\right)$. 1137. $\frac{1}{3a}\ln|b-a\operatorname{ctg} 3x|$. 1138. $\frac{2}{5}\operatorname{ch} 5x-\frac{3}{5}\operatorname{sh} 5x$. 1139. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x$. 1140. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$. 1141. $2\operatorname{arctg} e^x$. 1142. $\ln|\operatorname{th} x|$. 1143. $\ln\operatorname{ch} x$. 1144. $\ln|\operatorname{sh} x|$. 1145. $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}$. 1146. $\frac{1}{4}\ln|x^4-$ $-4x+1|$. 1147. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}$. 1148. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 1149. $\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2})$. 1150. $\frac{x^3}{3}-$

$-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|$. 1151. $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}$. 1152. $\ln|x+\cos x|$. 1153. $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x+\operatorname{tg} 3x|+\frac{1}{\sin 3x}\right)$. 1154. $-\frac{1}{\ln x}$. 1155. $\ln|\operatorname{tg} x+$ $+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2}|$. 1156. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}$. 1157. $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}$. 1158. $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$. 1159. $\frac{1}{2}\arcsin(x^2)$. 1160. $\frac{1}{a}\operatorname{tg} ax-x$. 1161. $\frac{x}{2}-$ $-\frac{\sin x}{2}$. 1162. $\arcsin\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. 1163. $a\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 1164. $\frac{3}{4}\times$ $\times\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$. 1165. $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|$. 1166. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|$. 1167. $e^{\operatorname{arctg} x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\operatorname{arctg} x$. 1168. $-\ln|\sin x+\cos x|$. 1169. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$. 1170. $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$. 1171. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x$. 1172. $e^{\sin^2 x}$. 1173. $\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$. 1174. $x-\ln(1+e^x)$. 1175. $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 1176. $\ln(e^x+$ $+\sqrt{e^{2x}-2})$. 1177. $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg} ax|$. 1178. $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$. 1179. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$. 1180. $-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$. 1181. $-e^{-\operatorname{tg} x}$. 1182. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)$. 1183. $-2\operatorname{ctg} 2x$. 1184. $\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$. 1185. $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2 x+1})$. 1186. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|$. 1187. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$. Indication. $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=$ $=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2}$. 1188. $\frac{2}{3}\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})^3}$. 1189. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}(x^3+3)$. 1190. $\frac{1}{\ln 3}3^{th x}$. 1191. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}$ pour $x>\sqrt{2}$; b) $-\ln(1+e^{-x})$; c) $\frac{1}{80}(5x^2-3)^8$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$; e) $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$. 1192. $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$. 1193. $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-\right.$

$-2\ln|1+\sqrt{x}|\Big)$. 1194. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. 1195. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. 1196. $\ln x-\ln 2\ln|\ln x+2\ln 2|$. 1197. $\frac{(\arcsin x)^3}{3}$. 1198. $\frac{2}{3}(e^x-2)\times$ $\times\sqrt{e^x+1}$. 1199. $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}$. 1200. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. Indication. Poser $x=\frac{1}{t}$. 1201. $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. 1202. $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2}-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$. 1203. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}$. 1204. $\arccos\frac{1}{x}$ si $x>0$ et $\arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x<0$*). Indication. Poser $x=\frac{1}{t}$. 1205. $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. 1206. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$. Remarque. On peut prendre le changement de variable $x=\frac{1}{z}$ à la place d'une substitution trigonométrique. 1207. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+$ $+\frac{1}{2}\arcsin x$. 1208. $2\arcsin\sqrt{x}$. 1210. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+$ $+\sqrt{x^2-a^2}|$. 1211. $x\ln x-x$. 1212. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1213. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 1214. $\sin x-x\cos x$. 1215. $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$. 1216. $-\frac{x+1}{e^x}$. 1217. $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$. 1218. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. Solution. Utiliser la méthode des coefficients indéterminés à la place de plusieurs intégrations par parties

$$\int x^2e^{3x}\,dx=(Ax^2+Bx+C)\,e^{3x}$$

ou, après dérivation,

$$x^2e^{3x}=(Ax^2+Bx+C)\,3e^{3x}+(2Ax+B)\,e^{3x}.$$

En simplifiant par e^{3x} et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve

$$1=3A,\quad 0=3B+2A,\quad 0=3C+B,$$

d'où $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{2}{9}$, $C=\frac{2}{27}$. Dans le cas général $\int P_n(x)\,e^{ax}\,dx=$

---

*) Dans la suite, dans les cas analogues, on se bornera parfois à donner une réponse valable seulement pour une partie du domaine d'existence de la fonction à intégrer.

$= Q_n(x)\, e^{ax}$, où $P_n(x)$ est un polynôme donné de degré n et $Q_n(x$ un polynôme de degré n à coefficients indéterminés.

1219. — $e^x(x^2+5)$. Indication. Voir problème 1218*. 1220. — $3e^{-\frac{x}{3}} \times (x^3+9x^2+54x+162)$. Indication. Voir problème 1218*. 1221. $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}$. 1222. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x$. Indication. On recommande aussi d'appliquer la méthode des coefficients indéterminés sous la forme

$$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx = Q_n(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x,$$

où $P_n(x)$ est un polynôme donné de degré n, $Q_n(x)$ et $R_n(x)$ des polynômes de degré n à coefficients indéterminés (voir problème 1218*). 1223. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$. 1224. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x$. 1225. $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$. 1226. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$. 1227. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$. 1228. $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. 1229. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. 1230. $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|$. 1231. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 1232. $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}$. 1233. $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$. 1234. $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$. 1235. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$. 1236. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$. 1237. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. 1238. $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x$. 1239. $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x$. 1240. $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}$. 1241. $[\ln(\ln x)-1]\times\ln x$. 1242. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)$. 1243. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1244. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. 1245. $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$. 1246. $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$. 1247. $\frac{x\operatorname{tg} 2x}{2}+\frac{\ln|\cos 2x|}{4}-\frac{x^2}{2}$. 1248. $\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right)$. 1249. $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}$. 1250. $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. Solution. En faisant $u=x$ et $dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, on a $du=dx$ et $v=-\frac{1}{2(x^2+1)}$. D'où $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{2(x^2+1)}=$

$= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$. 1251. $\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\right)$.

Indication. Utiliser l'identité $1 \equiv \frac{1}{a^2}[(x^2+a^2)-x^2]$. 1252. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. Solution. Posons $u = \sqrt{a^2-x^2}$ et $dv = dx$; d'où $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ et $v = x$; on a $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$ $= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$ $= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Donc, $2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$ $= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$. 1253. $\frac{x}{2}\sqrt{A+x^2} + \frac{A}{2}\ln|x + \sqrt{A+x^2}|$. Indication. Voir problème 1252*. 1254. $-\frac{x}{2}\times\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$. Indication. Voir problème 1252*. 1255. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$. 1256. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$. 1257. $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$. 1258. $\frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13) + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}$. 1259. $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5) + 4\operatorname{arctg}(x-2)$. 1260. $x - \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$. 1261. $x + 3\ln(x^2-6x+10) + 8\operatorname{arctg}(x-3)$. 1262. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$. 1263. $\arcsin(2x-1)$. 1264. $\ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right|$. 1265. $3\sqrt{x^2-4x+5}$. 1266. $-2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$. 1267. $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left(x\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2-2x+1}\right)$. 1268. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$. 1269. $-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}}$. 1270. $\arcsin\times\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}$ $(x > \sqrt{2})$. 1271. $-\arcsin\frac{1}{x+1}$. 1272. $\frac{x+1}{2}\times\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})$. 1273. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-1)$. 1274. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}$.

1275. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|$. 1276. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}$. 1277. $\ln\left(e^x+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)$. 1278. $-\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}|$. 1279. $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}$. 1280. $\frac{1}{a-b}\times$ $\times\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|$. 1281. $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|$. 1282. $\frac{1}{12}\times$ $\times\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$. 1283. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$. 1284. $5x+$ $+\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|$. 1285. $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$. 1286. $\frac{1}{4}x+$ $+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-7)^7(2x+1)^9}\right|$. 1287. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}$. 1288. $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}$. 1289. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+$ $+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$. 1290. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$. 1291. $x+$ $+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|$. 1292. $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. 1293. $\frac{1}{52}\times$ $\times\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)$. 1294. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 1295. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 1296. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+$ $+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 1297. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}$. 1298. $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)$. 1299. $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+$ $+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$. 1300. $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+$ $+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)$. 1301. $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}+$ $+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$. 1302. $-\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{x}{4(x^4-1)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. 1303. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x$. 1304. $x-\frac{x-1}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+3\operatorname{arctg}(x-1)$. 1305. $\frac{1}{21}\times$

$\times(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)$. 1306. $\frac{1}{2}\ln|x^4-1|-\frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-$ $-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right|$. 1307. $-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+$ $+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$. 1308. $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+1}\right)$. 1309. $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. 1310. $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|$. Indication. Poser $1=(x^7+1)-x^7$. 1311. $\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}$. 1312. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$. 1313. $-\frac{1}{9(x-1)^9}-$ $-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}$. 1314. $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x$. 1315. $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]$. 1316. $\frac{3}{10a^2}[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-$ $-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}]$. 1317. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$. 1318. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-$ $-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$. 1319. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-$ $-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$. 1320. $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-$ $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$. 1321. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}$. 1322. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}$. 1323. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. 1324. $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{2z}{z^3-1}$, où $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. 1325. $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$. 1326. $\frac{2x+3}{8}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{16}\ln(2x-1+2\times$ $\times\sqrt{x^2-x+1})$. 1327. $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$. 1328. $\left(\frac{5}{16}x-\right.$ $\left.-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 1329. $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\times$ $\times\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}$. 1330. $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\times$ $\times\frac{1}{x+1}$. 1331. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{19}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$. 1332. $\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$. 1333. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\times$

$\times\sqrt[4]{x^{-4}+1}$. 1334. $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$. 1335. $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, où $z=\sqrt[3]{1+x^5}$. 1336. $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}$. 1337. $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}$. 1338. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. 1339. $-\cos x+$ $+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$. 1340. $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}$. 1341. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-$ $-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}$. 1342. $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$. 1343. $\frac{3x}{8}-$ $-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. 1344. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. 1345. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. 1346. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x+\frac{1}{144}\sin^3 6x$. 1347. $-\operatorname{ctg} x-$ $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$. 1348. $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. 1349. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}$. 1350. $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-2\operatorname{ctg} 2x$. 1351. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x}-$ $-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}$. 1352. $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 1353. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\right.$ $\left.+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$. 1354. $\frac{-\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 1355. $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x}+\frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x}+\frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 1356. $\frac{1}{5}\times$ $\times\operatorname{tg} 5x-x$. 1357. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. 1358. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x$. 1359. $\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{3}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+x$. 1360. $\frac{x^2}{4}-$ $-\frac{\sin 2x^2}{8}$. 1361. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$. 1362. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-$ $-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}$. 1363. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}$. 1364. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, où $z=\sqrt{\operatorname{tg} x}$. 1365. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}$. 1366. $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}$. 1367. $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}$. 1368. $\frac{3}{2}\times$ $\times\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. 1369. $\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{x\cos 2b}{2}$. 1370. $\frac{t\cos\varphi}{2}-$ $-\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$. 1371. $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 5x}{20}+\frac{\sin 7x}{28}$. 1372. $\frac{1}{24}\cos 6x-$

$-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x$. 1373. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right|$. 1374. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. 1375. $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 1376. $-x+\operatorname{tg}x+\sec x$. 1377. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$. 1378. $\operatorname{arctg}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. 1379. $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln\times$ $\times|2\sin x+3\cos x|$. Solution. Posons $3\sin x+2\cos x\equiv\alpha\times$ $\times(2\sin x+3\cos x)+\beta(2\sin x+3\cos x)'$. D'où $2\alpha-3\beta=3$, $3\alpha+2\beta=2$, donc $\alpha=\frac{12}{13}$, $\beta=-\frac{5}{13}$. On a $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-$ $-\frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$. 1380. $-\ln|\cos x-\sin x|$. 1381. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)$. Indication. Diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par $\cos^2 x$. 1382. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}\right)$. Indication. Voir problème 1381. 1383. $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|$. Indication. Voir problème 1381. 1384. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|$. Indication. Voir problème 1381. 1385. $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$. 1386. $\ln(1+\sin^2 x)$. 1387. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$. 1388. $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$. 1389. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$. Indication. Utiliser l'identité $\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}\equiv\frac{1}{2-\sin x}-\frac{1}{3-\sin x}$. 1390. $-x+2\ln\times$ $\times\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|$. Indication. Utiliser l'identité $\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\equiv$ $\equiv-1+\frac{2}{1+\sin x-\cos x}$. 1391. $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}-\operatorname{ch}x$. 1392. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+$

$+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$. 1393. $\frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}$. 1394. $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$. 1395. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\operatorname{ch} x}$. 1396. $-2\operatorname{cth} 2x$. 1397. $\ln(\operatorname{ch} x)-\frac{\operatorname{th}^2 x}{2}$. 1398. $x-\operatorname{cth} x-\frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}$. 1399. $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$. 1400. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)\left(\text{ou } \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\times\right.$ $\left.\times(e^x\sqrt{5})\right)$. 1401. $-\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}-\frac{x}{2}$. Indication. Utiliser l'identité $\frac{-1}{\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}\equiv(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)$. 1402. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x+$ $+\sqrt{\operatorname{ch} 2x})$. 1403. $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. 1404. $\frac{x}{2}\times$ $\times\sqrt{2+x^2}+\ln(x+\sqrt{2+x^2})$. 1405. $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln(x+$ $+\sqrt{9+x^2})$. 1406. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$. 1407. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. 1408. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\times$ $\times\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$. 1409. $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+$ $+\sqrt{x^2-6x-7}|$. 1410. $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+$ $+\frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})$. 1411. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$. 1412. $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$. 1413. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. 1414. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. 1415. $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2}\right)$. 1416. $\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x\right)$. 1417. $-\frac{x\cos 3x}{6}+$ $+\frac{\sin 3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}$. 1418. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. 1419. $\frac{e^x}{2}\left(\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}-\frac{4\sin 4x+\cos 4x}{17}\right)$. 1420. $\frac{e^x}{2}[x(\sin x+\cos x)-$ $-\sin x]$. 1421. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. 1422. $x-\ln\times$ $\times(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+x+1})$. 1423. $\frac{1}{3}\left[x^3\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)+x^2\right]$. 1424. $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$. 1425. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100}\right)\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{100}\sqrt{20x-25x^2-3}$.

1426. $\frac{\sin x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x}{2}$. 1427. $I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1}\right]$; $I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$; $I_3 = \frac{1}{4a^2} \times \left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]$. 1428. $I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$; $I_4 = \frac{3x}{8} - \frac{\cos x \sin^3 x}{4} - \frac{3\sin 2x}{16}$; $I_5 = -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} - \frac{4}{15}\cos x \sin^2 x - \frac{8}{15}\cos x$. 1429. $I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$; $I_3 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; $I_4 = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x$. 1430. $I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$; $I_{10} = -e^{-x}(x^{10} + 10x^9 + 10\cdot 9x^8 + \ldots + 10\cdot 9\cdot 8 \ldots 2x + 10\cdot 9 \ldots 1)$. 1431. $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg} \times \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}$. 1432. $\ln\sqrt{x^2-2x+2} - 4\operatorname{arctg}(x-1)$. 1433. $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)$. 1434. $\frac{1}{5}\ln \times \sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$. 1435. $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$. 1436. $\frac{1}{2} \times \left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \frac{1}{x+1}\right)$. 1437. $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. 1438. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2} + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$. 1439. $\frac{1}{6}\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{6} \times \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 1440. $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$. 1441. $-\frac{1}{x} - \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}$. 1442. $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. 1443. $\sqrt{2x} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}$. 1444. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$. 1445. $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$. 1446. $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2 - 4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})$. 1447. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. 1448. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. 1449. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$. 1450. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. 1451. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right| - \frac{1}{8\sqrt{3}}\arcsin \times \frac{2(x+1)}{x+4}$. Indication. $\frac{1}{x^2+4x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right)$. 1452. $\frac{x}{2} \times$

$\times \sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|$. **1453.** $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+$ $+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)$. **1454.** $\ln\left|\frac{x}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$.

1455. $\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-$ $-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. **1456.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^2}$.

1457. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$. **1458.** $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, où $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1459.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$.

1460. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **1461.** $\ln|\operatorname{tg} x|-\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$.

1462. $-\operatorname{ctg} x-\frac{2\sqrt{(\operatorname{ctg} x)^3}}{3}$. **1463.** $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$.

1464. $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5x}{2}\right|$. **1465.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+$ $+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$. **1466.** $\frac{1}{4}\sin 2x$. **1467.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1468.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$. **1469.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{10}}\right)$.

1470. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x+1)$. **1471.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$.

1472. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. **1473.** $\ln|\operatorname{tg} x+$ $+2+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}|$. **1474.** $\frac{1}{a}\ln(\sin ax+\sqrt{a^2+\sin^2 ax})$.

1475. $\frac{1}{3}x\operatorname{tg} 3x+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$. **1476.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}$.

1477. $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$. **1478.** $\frac{1}{3}e^{x^3}$. **1479.** $\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-$ $-1|-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}$. **1480.** $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1481. $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **1482.** $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$.

1483. $\ln|1+\operatorname{ctg} x|-\operatorname{ctg} x$. **1484.** $\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}$. **1485.** $-2\operatorname{ch}\sqrt{1-x}$.

1486. $\frac{1}{5}\ln \operatorname{ch} 2x$. 1487. $-x \operatorname{cth} x + \ln|\operatorname{sh} x|$. 1488. $\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln|e^x - 2|$. 1489. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-3}{2}$. 1490. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$. 1491. $\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$. 1492. $-\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}\left(x^2 - 1 + \frac{x}{\ln 10} + \frac{1}{2\ln^2 10}\right)$. 1493. $2\sqrt{e^x+1} + \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$. 1494. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. 1495. $\frac{1}{4}\left(x^4 \arcsin\frac{1}{x} + \frac{x^2+2}{3}\times\sqrt{x^2-1}\right)$. 1496. $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x)$. 1497. $\frac{1}{5}\left(-x^2\cos 5x + \frac{2}{5}x\sin 5x + 3x\cos 5x + \frac{2}{25}\cos 5x - \frac{3}{5}\sin 5x\right)$. 1498. $\frac{1}{2}\times\left[(x^2-2)\operatorname{arctg}(2x+3) + \frac{3}{4}\ln(2x^2+6x+5) - \frac{x}{2}\right]$. 1499. $\frac{1}{2}\times\sqrt{x-x^2} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$. 1500. $\frac{x|x|}{2}$.

Chapitre V

1501. $b-a$. 1502. $v_0T - g\frac{T^2}{2}$. 1503. 3. 1504. $\frac{2^{10}-1}{\ln 2}$. 1505. 156. Indication. On partage le segment de l'axe OX d'extrémités $x=1$ et $x=5$ en parties, de manière que les points de division forment une progression géométrique: $x_0=1$, $x_1=x_0q$, $x_2=x_0q^2$, ..., $x_n=x_0q^n$. 1506. $\ln\frac{b}{a}$. Indication. Voir problème 1505. 1507. $1-\cos x$. Indication. Employer la formule $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]$. 1508. 1) $\frac{dI}{da} = -\frac{1}{\ln a}$; 2) $\frac{dI}{db} = \frac{1}{\ln b}$. 1509. $\ln x$. 1510. $-\sqrt{1+x^4}$. 1511. $2xe^{-x^4} - e^{-x}$. 1512. $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$. 1513. $x = n\pi$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. 1514. $\ln 2$. 1515. $-\frac{3}{8}$. 1516. $e^x - e^{-x} = 2\operatorname{sh} x$. 1517. $\sin x$. 1518. $\frac{1}{2}$. Solution. La somme $s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)$ peut être considérée comme la somme intégrale de la fonction $f(x)=x$ sur le segment $[0,1]$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. 1519. $\ln 2$. Solution. La somme

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

peut être considérée comme la somme intégrale de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$, où les points de division sont de la forme $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

1520. $\frac{1}{p+1}$. 1521. $\frac{7}{3}$. 1522. $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$. 1523. $\frac{7}{4}$. 1524. $\frac{16}{3}$. 1525. $-\frac{2}{3}$. 1526. $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$. 1527. $\ln\frac{9}{8}$. 1528. $35\frac{1}{15} - 32\ln 3$. 1529. $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. 1530. $\ln\frac{4}{3}$. 1531. $\frac{\pi}{16}$. 1532. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. 1533. $\frac{\pi}{4}$. 1534. $\frac{\pi}{2}$. 1535. $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1536. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. 1537. $\frac{2}{3}$. 1538. $\ln 2$. 1539. $1 - \cos 1$. 1540. 0. 1541. $\frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$. 1542. $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$. 1543. $\operatorname{sh} 1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$. 1544. $\operatorname{th}(\ln 3) - \operatorname{th}(\ln 2) = \frac{1}{5}$. 1545. $-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2\pi$. 1546. 2. 1547. Diverge. 1548. $\frac{1}{1-p}$ si $p < 1$; diverge si $p \geqslant 1$. 1549. Diverge. 1550. $\frac{\pi}{2}$. 1551. Diverge. 1552. 1. 1553. $\frac{1}{p-1}$ si $p > 1$; diverge si $p \leqslant 1$. 1554. π. 1555. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 1556. Diverge. 1557. Diverge. 1558. $\frac{1}{\ln 2}$. 1559. Diverge. 1560. $\frac{1}{\ln a}$. 1561. Diverge. 1562. $\frac{1}{k}$. 1563. $\frac{\pi^2}{8}$. 1564. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3$. 1565. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 1566. Diverge. 1567. Converge. 1568. Diverge. 1569. Converge. 1570. Converge. 1571. Converge. 1572. Diverge. 1573. Converge. 1574. Indication. $B(p, q) = \int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 f(x)\,dx$, où $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$; puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,x^{1-p} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{1-q} f(x) = 1$, les deux intégrales con-

vergent pour $1-p<1$ et $1-q<1$, c'est-à-dire pour $p>0$ et $q>0$.

1575. Indication. $\Gamma(p)=\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$, où $f(x)=x^{p-1}e^{-x}$.

La première intégrale converge pour $p>0$, la seconde pour p arbitraire. 1576. Non. 1577. $2\sqrt{2}\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,dt$. 1578. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$.

1579. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} dt$. 1580. $\int\limits_0^\infty \frac{f(\operatorname{arctg} t)}{1+t^2}\,dt$. 1581. $x=(b-a)\,t+a$.

1582. $4-2\ln 3$. 1583. $8-\frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$. 1584. $2-\frac{\pi}{2}$. 1585. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

1586. $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$. 1587. $1-\frac{\pi}{4}$. 1588. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 1589. $4-\pi$.

1590. $\frac{1}{5}\ln 112$. 1591. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. 1592. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. 1593. $\frac{\pi a^2}{8}$.

1594. $\frac{\pi}{2}$. 1599. $\frac{\pi}{2}-1$. 1600. 1. 1601. $\frac{e^2+3}{8}$. 1602. $\frac{1}{2}(e^\pi+1)$.

1603. 1. 1604. $\frac{a}{a^2+b^2}$. 1605. $\frac{b}{a^2+b^2}$. 1606. Solution. $\Gamma(p+1)=$

$=\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx$. En intégrant par partie avec $x^p=u$, $e^{-x}\,dx=dv$, d'où

$$du=px^{p-1}\,dx,\quad v=-e^{-x}$$

et

$$\Gamma(p+1)=[-x^p e^{-x}]_0^\infty+p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx=p\Gamma(p). \qquad (*)$$

Si p est un nombre entier, alors, en appliquant la formule (*) p fois et en tenant compte de

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=1,$$

on trouve

$$\Gamma(p+1)=p!$$

1607. $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2k}\frac{\pi}{2}$, si $n=2k$ est un nombre pair;

$$I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2k}{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}, \text{ si } n=2k+1 \text{ est un nombre impair.}$$

$$I_9=\frac{128}{315};\ I_{10}=\frac{63\pi}{512}.$$

1608. $\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$. 1609. $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)$. Indication. Posons $\sin^2 x=t$. 1610. a) Plus; b) moins; c) plus. Indication. Tracer le graphique de la fonction à intégrer pour les valeurs de la variable appartenant au segment d'intégration. 1611. a) La première; b) la deuxième; c) la première. 1612. $\frac{1}{3}$. 1613. a. 1614. $\frac{1}{2}$. 1615. $\frac{3}{8}$. 1616. $2\arcsin\frac{1}{3}$. 1617. $2<I<\sqrt{5}$. 1618. $\frac{2}{9}<I<\frac{2}{7}$. 1619. $\frac{2}{13}\pi<I<\frac{2}{7}\pi$. 1620. $0<I<\frac{\pi^2}{32}$. Indication. La fonction à intégrer est à croissance monotone. 1621. $\frac{1}{2}<I<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1623. $s=\frac{32}{3}$. 1624. 1. 1625. $\frac{1}{2}$. Indication. Prendre en considération les signes de la fonction. 1626. $4\frac{1}{4}$. 1627. 2. 1628. $\ln 2$. 1629. $m^2\ln 3$. 1630. πa^2. 1631. 12. 1632. $\frac{4}{3}p^2$. 1633. $4\frac{1}{2}$. 1634. $10\frac{2}{3}$. 1635. 4. 1636. $\frac{32}{3}$. 1637. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. 1638. $e+\frac{1}{e}-2=2(\operatorname{ch}1-1)$. 1639. $ab[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]$. 1640. $\frac{3}{8}\pi a^2$. Indication. Voir appendice VI, fig. 27. 1641. $2a^2e^{-1}$. 1642. $\frac{4}{3}a^2$. 1643. 15π. 1644. $\frac{9}{2}\ln 3$. 1645. 1. 1646. $3\pi a^2$. Indication. Voir application VI, fig. 23. 1647. $a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$. Indication. Voir appendice VI, fig. 24. 1648. $2\pi+\frac{4}{3}$ et $6\pi-\frac{4}{3}$. 1649. $\frac{16}{3}\pi-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{32}{3}\pi+\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 1650. $\frac{3}{8}\pi ab$. 1651. $3\pi a^2$. 1652. $\pi(b^2+2ab)$. 1653. $6\pi a^2$. 1654. $\frac{3}{2}a^2$. Indication. Pour la boucle le paramètre t varie entre les limites $0\leqslant t\leqslant+\infty$. Voir

appendice VI, fig. 22. 1655. $\frac{3}{2}\pi a^2$. Indication. Voir appendice VI, fig. 28. 1656. $8\pi^3 a^2$. Indication. Voir appendice VI, fig. 30. 1657. $\frac{\pi a^2}{8}$. 1658. a^2. 1659. $\frac{\pi a^2}{4}$. Indication. Voir appendice VI, fig. 33. 1660. $\frac{9}{2}\pi$. 1661. $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2$. 1662. $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. 1663. $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 1664. $\pi\sqrt{2}$. Indication. Passer aux coordonnées polaires. 1665. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 1666. $\sqrt{h^2-a^2}$. Indication. Utiliser la formule $\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sh}^2\alpha=1$. 1667. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 1668. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$. 1669. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 1670. $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. 1671. $\ln(2+\sqrt{3})$. 1672. $\frac{1}{4}(e^2+1)$. 1673. $a\ln\frac{a}{b}$. 1674. $2a\sqrt{3}$. 1675. $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b=$ $=\ln\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}$. 1676. $\frac{1}{2}aT^2$. Indication. Voir appendice VI, fig. 29. 1677. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. 1678. $16a$. 1679. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+$ $+\sqrt{1+4\pi^2})$. 1680. $8a$. 1681. $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. 1682. $\frac{\sqrt{5}}{2}+$ $+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 1683. $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$. 1684. $\frac{1}{2}[4+\ln 3]$. 1685. $\frac{\pi a^5}{30}$. 1686. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 1687. $\frac{a^3\pi}{4}(e^2+4-e^{-2})$. 1688. $\frac{3}{8}\pi^2$. 1689. $v_x=\frac{\pi}{4}$. 1690. $v_y=\frac{4}{7}\pi$. 1691. $v_x=\frac{\pi}{2}$; $v_y=2\pi$. 1692. $\frac{16\pi a^3}{5}$. 1693. $\frac{32}{15}\pi a^3$. 1694. $\frac{4}{3}\pi p^3$. 1695. $\frac{3}{10}\pi$. 1696. $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2)$. 1697. $2\pi^2 a^3$. 1698. $\frac{\pi R^2 H}{2}$. 1699. $\frac{16}{15}\pi h^2 a$. 1701. a) $5\pi^2 a^3$; b) $6\pi^3 a^3$; c) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$. 1702. $\frac{32}{105}\pi a^3$. 1703. $\frac{8}{3}\pi a^3$. 1704. $\frac{4}{21}\pi a^3$. 1705. $\frac{h}{3}\left(AB+\frac{Ab+aB}{2}+ab\right)$. 1706. $\frac{\pi abh}{3}$. 1707. $\frac{128}{105}a^3$. 1708. $\frac{8}{3}\pi a^2 b$. 1709. $\frac{1}{2}\pi a^2 h$. 1710. $\frac{16}{3}a^3$. 1711. $\pi a^2\sqrt{pq}$. 1712. $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$. 1713. $\frac{4}{3}\pi abc$. 1714. $\frac{8\pi}{3}[\sqrt{17^3}-1]$; $\frac{16}{3}\pi a^2[5\sqrt{5}-8]$. 1715.

$2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. **1716.** $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$. **1717.** $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **1718.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2+e^{-2}+4)=\frac{\pi a^2}{2}(2+\operatorname{sh}2)$. **1719.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **1720.** $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$. **1721.** $4\pi^2 ab$. Indication. Ici $y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$. En prenant le signe plus, on obtient la surface extérieure du tore et en prenant le signe moins, sa surface intérieure. **1722.** 1) $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$; 2) $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, où $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (excentricité de l'ellipse). **1723.** a) $\frac{64\pi a^2}{3}$; b) $16\pi^2a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **1724.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1725.** $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$. **1726.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1727.** $M_X=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; $M_Y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **1728.** $M_a=\frac{ab^2}{2}$; $M_b=\frac{a^2b}{2}$. **1729.** $M_X=M_Y=\frac{a^3}{6}$; $\bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{3}$. **1730.** $M_X=M_Y=\frac{3}{5}a^2$; $\bar{x}=\bar{y}=\frac{2}{5}a$. **1731.** $2\pi a^2$. **1732.** $\bar{x}=0$; $\bar{y}=\frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$. **1733.** $\bar{x}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$; $\bar{y}=0$. **1734.** $\bar{x}=\pi a$; $\bar{y}=\frac{4}{3}a$. **1735.** $\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$. **1736.** $\bar{x}=\bar{y}=\frac{9}{20}$. **1737.** $\bar{x}=\pi a$; $\bar{y}=\frac{5}{6}a$. **1738.** $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$. Solution. On partage la demi-sphère en zones sphériques élémentaires d'aire $d\sigma$ par des plans horizontaux. On a $d\sigma=2\pi a\,dz$, où dz est la hauteur de la zone. D'où $\bar{z}=\frac{2\pi\int_0^a az\,dz}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}$. Grâce à la symétrie, on a $\bar{x}=\bar{y}=0$. **1739.** Aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur à partir du sommet du cône. Solution. Partager le cône en éléments par des plans parallèles à la base. La masse d'une tranche élémentaire est $dm_i=\gamma\pi\rho^2\,dz$, où γ est la densité, z la distance comptée à partir du sommet du cône au plan sécant, $\rho=\frac{r}{h}z$. D'où $\bar{z}=\frac{\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}z^3\,dz}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{3}{4}h$. **1740.** $\left(0;\ 0;\ +\frac{3}{8}a\right)$. Solution. D'après la symétrie $\bar{x}=\bar{y}=0$. Pour déterminer $\bar{z}$, partageons la demi-sphère en tranches élémentaires par

des plans parallèles horizontaux. La masse d'une tranche élémentaire est $dm = \gamma\pi r^2\,dz$, où γ est la densité, z la distance du plan sécant à la base de la demi-sphère, $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ le rayon de la section. On a $\bar{z} = \dfrac{\pi \int\limits_0^a (a^2 - z^2)\,z\,dz}{\dfrac{2}{3}\pi a^3} = \dfrac{3}{8}a$. 1741. $I = \pi a^3$. 1742. $I_a = \dfrac{1}{3}ab^3$; $I_b = \dfrac{1}{3}a^3b$. 1743. $I = \dfrac{4}{15}hb^3$. 1744. $I_a = \dfrac{1}{4}\pi ab^3$; $I_b = \dfrac{1}{4}\pi a^3b$. 1745. $I = \dfrac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)$. Solution. Partageons la couronne en couronnes concentriques élémentaires. La masse d'une couronne élémentaire est $dm = \gamma 2\pi r\,dr$ et le moment d'inertie $I = 2\pi \times \int\limits_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = \dfrac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)$, $(\gamma = 1)$. 1746. $I = \dfrac{1}{10}\pi R^4 H\gamma$. Solution. Partageons le cône en cylindres élémentaires parallèlement à l'axe du cône. Le volume du cylindre élémentaire est $dV = 2\pi rh\,dr$, où r est le rayon du cylindre (la distance jusqu'à l'axe du cône), $h = H\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ la hauteur du cylindre élémentaire; alors, le moment d'inertie est $I = \gamma \int\limits_0^R 2\pi H\left(1 - \dfrac{r}{R}\right) r^3\,dr = \dfrac{\gamma\pi R^4 H}{10}$, où γ est la densité du cône. 1747. $I = \dfrac{2}{5}Ma^2$. Solution. Partager la boule en cylindres élémentaires d'axe le diamètre donné. Le volume élémentaire est $dV = 2\pi rh\,dr$, où r est le rayon du cylindre, $h = 2a\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{a^2}}$ sa hauteur. Le moment d'inertie est $I = 4\pi\alpha\gamma \int\limits_0^a \sqrt{1 - \dfrac{r^2}{a^2}}\,r^3\,dr = \dfrac{8}{15}\pi a^5\gamma$, où γ est la densité de la boule et, puisque la masse est $M = \dfrac{4}{3}\pi a^3\gamma$, on a $I = \dfrac{2}{5}Ma^2$. 1748. $V = 2\pi^2a^2b$, $S = 4\pi^2ab$. 1749. a) $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2}{5}a$; b) $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{9}{10}p$. 1750. a) $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{4}{3}\dfrac{r}{\pi}$. Indication. Les axes de coordonnées sont choisis de manière que l'axe OX coïncide avec un diamètre et l'origine des coordonnées avec le centre du cercle; b) $x = \dfrac{h}{3}$. Solution. Le volume du corps, un

cône double obtenu par la rotation d'un triangle autour de sa base est $V=\frac{1}{3}\pi bh^2$, où b est la base, h la hauteur du triangle. D'après le théorème de Guldin, ce même volume est $V=2\pi\bar{x}\frac{1}{2}bh$, où $\bar{x}$ est la distance du centre de gravité à la base. Donc $\bar{x}=\frac{h}{3}$. 1751. $v_0t-\frac{gt^2}{2}$. 1752. $\frac{c^2}{2g}\ln\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right)$. 1753. $x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$; $v_{\text{moy}}=\frac{2}{\pi}v_0$. 1754. $S=10^4\ m$. 1755. $v=\frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a-bt}\right)$; $h=\frac{A}{b^2}\left[bt_1-(a-bt_1)\times\ln\frac{a}{a-bt_1}\right]$. 1756. $A=\frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. Indication. La force élémentaire (force de pesanteur) est égale au poids de l'eau contenue dans une couche d'épaisseur dx, c'est-à-dire $dF=\gamma\pi R^2\,dx$, où γ est le poids de l'unité de volume d'eau. Donc, le travail élémentaire de la force est $dA=\gamma\pi R^2(H-x)\,dx$, où x est le niveau de l'eau. 1757. $A=\frac{\pi}{12}\gamma R^2H^2$. 1758. $A=\frac{\pi\gamma}{4}R^4\cdot TM\approx 0{,}79\cdot 10^4=0{,}79\cdot 10^7$ kgm. 1759. $A=\gamma\pi R^3H$. 1760. $A=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$, $A_\infty=mgR$. Solution. La force qui agit sur le corps de masse m est $F=k\frac{mM}{r^2}$, où r est la distance comptée à partir du centre de la Terre. Puisque pour $r=R$ on a $F=mg$, alors $kM=gR^2$. Le travail cherché est $A=\int\limits_R^{R+h}k\frac{mM}{r^2}\,dr=kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$. Pour $h=\infty$ on a $A_\infty=mgR$. 1761. $1{,}8\cdot 10^4$ ergs. Solution. La force d'interaction entre les charges est $F=\frac{e_0e_1}{x^2}$ dynes. Donc, le travail fourni lorsqu'on déplace la charge e_1 du point x_1 au point x_2 est $A=e_0e_1\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}=e_0e_1\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=1{,}8\cdot 10^4$ ergs. 1762. $A=800\pi\ln 2$ kgm. Solution. Dans un processus isothermique $pv=p_0v_0$. Le travail fourni par la dilatation d'un gaz passant du volume v_0 au volume v_1 est $A=\int\limits_{v_0}^{v_1}p\,dv=p_0v_0\ln\frac{v_1}{v_0}$. 1763. $A\approx 15000$ kgm. Solution. Dans un processus adiabatique on a la formule de Poisson $pv^k=p_0v_0^k$, où

$k \approx 1{,}4$. D'où $A = \int\limits_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0^k}{v^k} dv = \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right]$. **1764.** $A = \frac{4}{3} \pi\mu Pa$. Solution. Si a est le rayon de la base de l'arbre, alors la pression sur l'unité d'aire du support est $p = \frac{P}{\pi a^2}$. La force de frottement de l'anneau d'épaisseur dr, distant de r du centre est $\frac{2\mu P}{a^2} r\,dr$. Le travail de la force de frottement sur la couronne pour un tour complet est $dA = \frac{4\pi\mu P}{a^2} r^2\,dr$. Donc, le travail total est $A = \frac{4\pi\mu P}{a^2} \int\limits_0^a r^2\,dr = \frac{4}{3} \pi\mu Pa$. **1765.** $\frac{1}{4} MR^2\omega^2$. Solution. L'énergie cinétique d'une particule du disque est $dK = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} d\sigma$ où $d\sigma$ est l'élément d'aire, r la distance à l'axe de rotation, ρ la densité superficielle, $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Ainsi, $dK = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2} r^2\,d\sigma$. D'où $K = \frac{M\omega^2}{R^2} \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}$. **1766.** $K = \frac{3}{20} MR^2\omega^2$. **1767.** $K = \frac{M}{5} R^2\omega^2 = 2{,}3 \cdot 10^8$ kgm. Indication. La quantité de travail nécessaire est égale à la réserve d'énergie cinétique. **1768.** $p = \frac{bh^2}{6}$. **1769.** $p = \frac{(a+2b)\,h^2}{6} \approx 11{,}3 \cdot 10^3\,T$. **1770.** $P = ab\gamma\pi h$. **1771.** $P = \frac{\pi R^2 H}{3}$ (la composante verticale est dirigée de bas en haut). **1772.** $533\frac{1}{3}$ g. **1773.** 99,8 cal. **1774.** $M = \frac{b^2hp}{2}$ gcm. **1775.** $\frac{kMm}{a(a+l)}$ (k est la constante de gravitation). **1776.** $\frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. Solution. $Q = \int\limits_0^a v 2\pi r\,dr = \frac{2\pi p}{4\mu l} \int\limits_0^a (a^2 - r^2)\,r\,dr = \frac{\pi p}{2\mu l} \left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. **1777.** $Q = \int\limits_0^{2b} v_a\,dy = \frac{2}{3} p \frac{ab^3}{\mu l}$. Indication. L'axe des abscisses est dirigé

suivant le grand côté inférieur du rectangle et l'axe des ordonnées lui est perpendiculaire en son milieu. 1778. Solution. $S = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{a} dv$, d'autre part $\frac{dv}{dt} = a$, d'où $dv = \frac{1}{a} dv$, et donc le temps de démarrage est $t = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a} = S$. 1779. $M_x = -\int_0^x \frac{Q}{l}(x-t)\,dt + \frac{Q}{2}x = -\frac{Q}{l}\left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \frac{Q}{2}x = \frac{Qx}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$. 1780. $M_x = -\int_0^x (x-t)\,kt\,dt + Ax = \frac{kx}{6}(l^2 - x^2)$. 1781. $Q = 0{,}12TRI_0^2$ cal. Indication. Appliquer la loi de Joule-Lenz.

Chapitre VI

1782. $V = \frac{2}{3}(y^2 - x^2)x$. 1783. $S = \frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4z^2 + 3(x-y)^2}$. 1784. $f\left(\frac{1}{2}; 3\right) = \frac{5}{3}$; $f(1; -1) = -2$. 1785. $\frac{y^2-x^2}{2xy}, \frac{x^2-y^2}{2xy}, \frac{y^2-x^2}{2xy}, \frac{2xy}{x^2-y^2}$. 1786. $f(x, x^2) = 1 + x - x^2$. 1787. $z = \frac{R^4}{1-R^2}$. 1788. $f(x)\ \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Indication. Mettre la fonction donnée sous la forme $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ et remplacer $\frac{y}{x}$ par x. 1789. $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{2}$ Solution. Posons $x + y = u$, $x - y = v$. Alors $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$; $f(u, v) = \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2 - uv}{2}$. Il suffit de remplacer u par x et v par y. 1790. $f(u) = u^2 + 2u$; $z = x - 1 + \sqrt{y}$. Indication. Dans l'identité $x = 1 + f(\sqrt{x} - 1)$ posons $\sqrt{x} - 1 = u$; alors $x = (u+1)^2$ et, par conséquent, $f(u) = u^2 + 2u$. 1791. $f(y) = \sqrt{1+y^2}$; $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Solution. Pour $x = 1$ on a l'identité $\sqrt{1+y^2} = 1 \cdot f\left(\frac{y}{1}\right)$, c'est-à-dire $f(y) = \sqrt{1+y^2}$. Alors $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ et $z = x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. 1792. a) Le cercle unitaire de centre à l'origine des coordonnées y compris la circonférence $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$; b) la bissectrice $y = x$ de l'angle de coordonnées; c) le demi-plan situé au-dessus de la droite $x + y = 0$ $(x + y > 0)$; d) la tranche comprise entre les droites $y = \pm 1$, y compris ces droites $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$;

e) le carré formé par les segments de droite $x=\pm 1$ et $y=\pm 1$ y compris les côtés $(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1)$; f) la partie du plan adjacente à l'axe OX et comprise entre les droites $y=\pm x$, y compris ces droites à l'exception de l'origine des coordonnées $(-x \leqslant y \leqslant x$ pour $x>0$, $x \leqslant y \leqslant -x$ pour $x<0)$; g) les deux tranches $x \geqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$ et $x \leqslant -2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$; h) la couronne comprise entre les circonférences $x^2+y^2=a^2$ et $x^2+y^2=2a^2$ y compris la frontière ; i) les tranches $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$, $y \geqslant 0$ et $(2n+1)\pi \leqslant x \leqslant (2n+2)\pi$, $y \leqslant 0$, où n est un nombre entier ; j) la partie du plan située au-dessus de la parabole $y=-x^2 \times (x^2+y>0)$; k) tout le plan XOY ; l) tout le plan XOY, l'origine des coordonnées étant exclue ; m) la partie du plan située au-dessus de la parabole $y^2=x$ et à droite de l'axe OY, avec les points de l'axe OY et sans les points de la parabole $(x \geqslant 0,\ y > \sqrt{x})$; n) tout le plan sauf les points de droites $x=1$ et $y=0$; o) la famille des anneaux concentriques $2\pi k \leqslant x^2+y^2 \leqslant \pi(2k+1)$ $(k=0, 1, 2\ldots)$. **1793.** a) Le trièdre $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (y compris la frontière) ; b) les Ier, IIIe, IVe et VIIIe trièdres de coordonnées (la frontière non comprise) ; c) le cube limité par les plans $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ et $z=\pm 1$, y compris les faces ; d) la boule de rayon 1 de centre à l'origine des coordonnées y compris sa surface. **1794.** a) Le plan ; les lignes de niveau sont les droites, parallèles à la droite $x+y=0$; b) paraboloïde de révolution ; les lignes de niveau sont des circonférences concentriques de centre à l'origine des coordonnées ; c) paraboloïde hyperbolique ; les lignes de niveau sont des hyperboles équilatères ; d) cône du second degré ; les lignes de niveau sont des hyperboles équilatères ; e) cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à la droite $x+y+1=0$; les lignes de niveau sont des droites parallèles ; f) la surface latérale d'une pyramide de base rectangulaire ; les lignes de niveau sont les contours des carrés obtenus en coupant la pyramide par des plans perpendiculaires à l'axe des z ; g) les lignes de niveau sont les paraboles $y=Cx^2$; h) les lignes de niveau sont les paraboles $y=C\sqrt{x}$; i) les lignes de niveau sont les circonférences $C(x^2+y^2)=2x$. **1795.** a) Les paraboles $y=C-x^2$ $(C>0)$; b) les hyperboles $xy=C$ $(|C| \leqslant 1)$; c) les circonférences $x^2+y^2=C^2$; d) les droites $y=ax+C$; e) les droites $y=Cx$ $(x \neq 0)$. **1796.** a) Les plans parallèles au plan $x+y+z=0$; b) les sphères concentriques de centre à l'origine des coordonnées ; c) pour $u>0$ les hyperboloïdes à une nappe de révolution autour de l'axe OZ ; pour $u<0$ les hyperboloïdes à deux nappes de révolution autour du même axe ; le cône $x^2+y^2-z^2=0$ $(u=0)$ partage les deux familles de surface. **1797.** a) 0 ; b) 0 ; c) 2 ; d) e^k, e) la limite n'existe pas ; f) la limite n'existe pas. Indication. Pour b) passer en coordonnées polaires. Pour e) et f) considérer les variations de x et de y sur les droites $y=kx$ et montrer que l'expression donnée peut tendre vers des limites différentes en fonction de k. **1798.** La fonction est continue. **1799.** a) On a un point de discontinuité pour $x=0$, $y=0$; *b*) tous les points de la droite $x=y$ (droite de discontinuité) ; c) courbe de discontinuité, la circonférence $x^2+y^2=1$; d) courbe de discontinuité, les axes de coordonnées. **1800.** Indication. En faisant $y=y_1=\text{const}$ on obtient la fonction $\varphi_1(x)=\dfrac{2xy_1}{x^2+y_1^2}$ qui est partout continue, puisque pour $y_1 \neq 0$ le dé-

nominateur $x^2+y_1^2 \neq 0$ et pour $y_1=0$ $\varphi_1(x) \equiv 0$. De même, pour $x=x_1=\text{const}$ la fonction $\varphi_2(y)=\frac{2x_1y}{x_1^2+y^2}$ est partout continue. Par rapport à l'ensemble des variables x et y la fonction z est discontinue au point (0, 0) puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$ n'existe pas. En effet, en passant aux coordonnées polaires ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$) on a $z=\sin 2\varphi$, d'où on voit que si $x\to 0$ et $y\to 0$ de manière que $\varphi=\text{const}$ ($0\leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) alors, $z\to \sin 2\varphi$. Puisque ces valeurs limites de la fonction z dépendent de la direction φ, la fonction z n'a pas de limite pour $x\to 0$ et $y\to 0$. **1801.** $\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$. **1802.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$. **1803.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$. **1804.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **1805.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **1806.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. **1807.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. **1808.** $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$. **1809.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$. **1810.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. **1811.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. **1812.** $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$. **1813.** $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$. **1814.** $f'_x(2,1)=\frac{1}{2}$, $f'_y(2,1)=0$. **1815.** $f'_x(1;2;0)=1$, $f'_y(1;2;0)=\frac{1}{2}$, $f'_z(1;2;0)=\frac{1}{2}$. **1820.** $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. **1821.** r. **1826.** $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\varphi(x)$. **1827.** $z=\frac{x^2}{2}+y^2\ln x+\sin y-\frac{1}{2}$. **1828.** 1) $\operatorname{tg}\alpha=4$, $\operatorname{tg}\beta=\infty$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\infty$, $\operatorname{tg}\beta=4$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}$. **1829.** $\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{1}{2}h$, $\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{1}{2}h$, $\frac{\partial S}{\partial h}=\frac{1}{2}(a+b)$. **1830.** Indication. Vérifier que la fonction est égale à zéro sur tout l'axe OX et sur tout l'axe OY et utiliser la définition des dérivées partielles. Se convaincre que $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. **1831.** $\Delta f=4\Delta x+\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y$; $df=4dx+dy$; a) $\Delta f-df=8$; b) $\Delta f=df=0{,}062$. **1833.** $dz=3(x^2-y)\times$

$\times dx + 3(y^2 - x)\,dy$. 1834. $dz = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$. 1835. $dz = \frac{4}{(x^2+y^2)^2} \times$ $\times (xy^2\,dx - x^2y\,dy)$. 1836. $dz = \sin 2x\,dx - \sin 2y\,dy$. 1837. $dz =$ $= y^2x^{y-1}\,dx + x^y(1 + y\ln x)\,dy$. 1838. $dz = \frac{2}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy)$. 1839. $df = \frac{1}{x+y}\left(dx - \frac{x}{y}\,dy\right)$. 1840. $dz = 0$. 1841. $dz = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(dy - \frac{y}{x}\,dx\right)$. 1842. $df(1, 1) = dx - 2dy$. 1843. $du = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$. 1844. $du = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$. 1845. $du = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1} \times$ $\times \left[\left(y + \frac{1}{y}\right) z\,dx + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) xz\,dy + \left(xy + \frac{x}{y}\right)\ln\left(xy + \frac{x}{y}\right) dz\right]$. 1846. $du = \frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(y\,dx + x\,dy - \frac{2xy}{z}\,dz\right)$. 1847. $df(3, 4, 5) =$ $= \frac{1}{25}(5dz - 3dx - 4dy)$. 1848. $dl = 0{,}062$ cm ; $\Delta l = 0{,}065$ cm. 1849. 75 cm³ (par rapport aux dimensions intérieures). 1850. $\frac{1}{8}$ cm. Indication. Annuler la différentielle de l'aire du secteur et trouver la différentielle du rayon. 1851. a) 1,00 ; b) 4,998 ; c) 0,273. 1853. A 4 m près (plus exactement à 4,25 m près). 1854. $\pi\frac{\alpha g - \beta l}{g\sqrt{lg}}$. 1855. $d\alpha = \frac{1}{\rho}(dy\cos\alpha -$ $- dx\sin\alpha)$. 1856. $\frac{dz}{dt} = \frac{e^l(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$. 1857. $\frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$. 1858. $\frac{du}{dt} = 2t\ln t\operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$. 1859. $\frac{du}{dt} = 0$. 1860. $\frac{dz}{dx} = (\sin x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{ctg} x - \sin x\ln\sin x)$. 1861. $\frac{dz}{dx} =$ $= -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$. 1862. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = x^y\left[\varphi'(x)\ln x + \right.$ $\left. + \frac{y}{x}\right]$. 1863. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_u(u, v) + ye^{xy}f'_v(u, v)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2uf'_u(u, v) +$ $+ xe^{xy}f'_v(u, v)$. 1864. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$. 1865. $\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \times$ $\times f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{x}\right) f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$. 1867. $\frac{du}{dx} = f'_x(x, y, z) +$ $+ \varphi'(x) f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z)[\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)\varphi'(x)]$. 1873. Le périmètre croît à la vitesse de 2 m/s, l'aire croît à la vitesse de 70 m²/s. 1874. $\frac{1+2t^3+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. 1875. $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ km/h. 1876. $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. 1877. 1. 1878. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1879. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1880. $\frac{68}{13}$. 1881. $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$. 1882. a) (2 ; 0) ; b) (0 ; 0) et (1 ; 1) ; c) (7 ; 2 ; 1). 1884. $9i - 3j$. 1885. $\frac{1}{4}(5i - 3j)$. 1886. $6i + 3j + 2k$. 1887. $|\operatorname{grad} u| = 6$; $\cos\alpha =$

$=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$. 1888. $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$. 1889. $\operatorname{tg}\varphi\approx$ $\approx 8{,}944$; $\varphi\approx 83°37'$. 1891. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=$ $=-\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$. 1892. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$. 1893. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. 1894. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$. 1895. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$. 1896. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=1$. 1897. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\alpha\beta\gamma x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$. 1898. $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=-x^2y\cos(xy)-2x\sin(xy)$. 1899. $f''_{xx}(0,0)=m(m-1)$; $f''_{xy}(0,0)=mn$; $f''_{yy}(0,0)=n(n-1)$. 1902. Indication. Vérifier en utilisant les règles de dérivation et la définition de la dérivée partielle que $f'_x(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ (pour $x^2+y^2\neq 0$), $f'_x(0,0)=0$ et donc que pour $x=0$ et y quelconque $f'_x(0,y)=-y$. D'où $f''_{xy}(0,y)=-1$, en particulier, $f''_{xy}(0,0)=-1$. De même, on trouve que $f''_{yx}(0,0)=1$. 1903. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'_u(u,v)+4x^2f''_{uu}(u,v)+$ $+4xyf''_{uv}(u,v)+y^2f''_{vv}(u,v)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f'_v(u,v)+4xyf''_{uu}(u,v)+2(x^2+y^2)\times$ $\times f''_{uv}(u,v)+xyf''_{vv}(u,v)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'_u(u,v)+4y^2f''_{uu}(u,v)+4xyf''_{uv}\times$ $\times(u,v)+x^2f''_{vv}(u,v)$. 1904. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{xx}+2f''_{xz}\varphi'_x+f''_{zz}(\varphi'_x)^2+f'_z\varphi''_{xx}$. 1905. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{uu}(\varphi'_x)^2+2f''_{uv}\varphi'_x\psi'_x+f''_{vv}(\psi'_x)^2+f'_u\varphi''_{xx}+f'_v\psi''_{xx}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=$ $=f''_{uu}\varphi'_x\varphi'_y+f''_{uv}(\varphi'_x\psi'_y+\psi'_x\varphi'_y)+f''_{vv}\psi'_x\psi'_y+f'_u\varphi''_{xy}+f'_v\psi''_{xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=f''_{uu}(\varphi'_y)^2+2f''_{uv}\varphi'_y\psi'_y+f''_{vv}(\psi'_y)^2+f'_u\varphi''_{yy}+f'_v\psi''_{yy}$. 1914. $u(x,y)=$ $=\varphi(x)+\psi(y)$. 1915. $u(x,y)=x\varphi(y)+\psi(y)$. 1916. $d^2z=e^{xy}[(y\,dx+$ $+x\,dy)^2+2\,dx\,dy]$. 1917. $d^2u=2(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$. 1918. $d^2z=$ $=4\varphi''(t)(x\,dx+y\,dy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$. 1919. $dz=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\times$ $\times\left(y\ln\frac{ex}{y}\,dx+x\ln\frac{x}{ey}\,dy\right)$, $d^2z=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\right)\times\right.$ $\left.\times dx^2+2\left(xy\ln\frac{ex}{y}\ln\frac{x}{ey}+\ln\frac{x}{y}\right)dx\,dy+\left(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\right)dy^2\right]$. 1920. $d^2z=a^2f''_{uu}(u,v)\,dx^2+2abf''_{uv}(u,v)\,dx\,dy+b^2f''_{vv}(u,v)\,dy^2$. 1921. $d^2z=(ye^xf'_v+e^{2y}f''_{uu}+2ye^{x+y}f''_{uv}+y^2e^{2x}f''_{vv})\,dx^2+2(e^yf'_u+e^xf'_v+$ $+xe^{2y}f''_{uu}+e^{x+y}(1+xy)f''_{uv}+ye^{2x}f''_{vv})\,dx\,dy+(xe^yf'_u+x^2e^{2y}f''_{uu}+$ $+2xe^{x+y}f''_{uv}+e^{2x}f''_{vv})\,dy^2$. 1922. $d^3z=e^x(\cos y\,dx^3-3\sin y\,dx^2\,dy-$ $-3\cos y\,dx\,dy^2+\sin y\,dy^3)$. 1923. $d^3z=-y\cos x\,dx^3-3\sin x\,dx^2\,dy-$ $-3\cos y\,dx\,dy^2+x\sin y\,dy^3$. 1924. $df(1;2)=0$; $d^2f(1;2)=6dx^2+$ $+2dx\,dy+4{,}5\,dy^2$. 1925. $d^2f(0,0,0)=2dx^2+4\,dy^2+6\,dz^2-4\,dx\,dy+$

$+8\,dx\,dz+4\,dy\,dz$. 1926. $xy+C$. 1927. $x^3y-\frac{y^3}{3}+\sin x+C$. 1928. $\frac{x}{x+y}+\ln(x+y)+C$. 1929. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C$. 1930. $\frac{x}{y}+C$. 1931. $\sqrt{x^2+y^2}+C$. 1932. $a=-1$, $b=-1$, $z=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$. 1933. $x^3+y^2+z^2+xy+xz+yz+C$. 1934. $x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C$. 1935. $x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+3z+C$. 1936. $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C$. 1937. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. 1938. $\lambda=-1$. Indication. Former la condition de différentielle totale pour l'expression $X\,dx+Y\,dy$. 1939. $f'_x=f'_y$. 1940. $u=\int\limits_a^{xy} f(z)\,dz+C$. 1941. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. 1942. L'équation déterminant y est l'équation d'un faisceau de deux droites. 1943. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$. 1944. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-1}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(1-y)^3}$. 1945. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=3$ ou -1; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=8$ ou -8. 1946. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+ay}{ax-y}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$. 1947. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{x^2}$. 1948. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$. 1949. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. 1950. $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$. 1951. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$. 1953. $\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}}{\psi'_y}$. 1954. $dz=-\frac{x}{z}\,dx-\frac{y}{z}\,dy$; $d^2z=\frac{y^2-a^2}{z^3}\,dx^2-2\,\frac{xy}{z^3}\,dx\,dy+\frac{x^2-a^2}{z^3}\,dy^2$. 1955. $dz=0$; $d^2z=\frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$. 1956. $dz=\frac{z}{1-z}(dx+dy)$; $d^2z=\frac{z}{(1-z)^3}(dx^2+2\,dx\,dy+dy^2)$. 1961. $\frac{dy}{dx}=\infty$; $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{5}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$; $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4}{25}$. 1962. $dy=\frac{y(z-x)}{x(y-z)}\,dx$; $dz=\frac{z(x-y)}{x(y-z)}\,dx$; $d^2y=-d^2z=-\frac{a}{x^3(y-z)^3}\times[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\,dx^2$. 1963. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial v}{\partial y}=0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=1$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

1964. $du=\frac{y}{1+y}dx+\frac{v}{1+y}dy$; $dv=\frac{1}{1+y}dx-\frac{v}{1+y}dy$; $d^2u=-d^2v=$ $=\frac{2}{(1+y)^2}dx\,dy-\frac{2v}{(1+y)^2}dy^2$. 1965. $du=\frac{\psi'_v\,dx-\varphi'_v\,dy}{\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}}$; $dv=$ $=\frac{-\psi'_u\,dx+\varphi'_u\,dy}{\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}}$. 1966. a) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}$; b) $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\frac{1}{2}(v+u)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}(v-u)$; c) $dz=\frac{1}{2e^{2u}}[e^{u-v}(v+u)\,dx+e^{u+v}(v-u)\,dy]$. 1967. $\frac{\partial z}{\partial x}=F'_r(r,\varphi)\cos\varphi-F'_\varphi(r,\varphi)\frac{\sin\varphi}{r}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=F'_r(r,\varphi)\sin\varphi+F'_\varphi(r,\varphi)\times$ $\times\frac{\cos\varphi}{r}$. 1968. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a}\cos\varphi\operatorname{ctg}\psi$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}\sin\varphi\operatorname{ctg}\psi$. 1969. $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$. 1970. $\frac{d^2y}{dt^2}=0$. 1971. a) $\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0$; b) $\frac{d^3x}{dy^3}=0$. 1972. $\operatorname{tg}\mu=\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$. 1973. $K=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$. 1974. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$. 1975. $u\frac{\partial z}{\partial u}-z=0$. 1976. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$. 1977. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. 1978. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. 1979. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. 1980. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. 1981. a) $2x-4y-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$; b) $3x+4y-6z=0$; $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$; c) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$, $\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=$ $=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{z-R}{0}$. 1982. $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. 1983. $3x+4y+12z-169=0$. 1985. $x+4y+6z=$ $=\pm 21$. 1986. $x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 1987. Aux points $(1,\pm 1,\ 0)$ les plans tangents sont parallèles au plan XOZ et aux points $(0;0;0)$ et $(2;0;0)$ au plan YOZ. Il n'y a pas de points en lesquels le plan tangent à la surface serait parallèle au plan XOY. 1991. $\frac{\pi}{3}$. 1994. La projection sur le plan XOY est: $\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2-xy-1=0.\end{cases}$ La projection sur le plan YOZ est: $\begin{cases}x=0,\\ \frac{3y^2}{4}+z^2-1=0.\end{cases}$ La projection sur le plan XOZ est: $\begin{cases}x=0,\\ \frac{3x^2}{4}+z^2-1=0.\end{cases}$

Indication. La courbe de tangence de la surface avec le cylindre qui projette cette surface sur un plan quelconque est le lieu géométrique des points en lesquels le plan tangent à la surface don-

née est perpendiculaire au plan de projection. 1996. $f(x+h, y+k)= = ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bhk+ck^2$. 1997. $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$. 1998. $\Delta f(x,y)= =2h+k+h^2+2hk+h^2k$. 1999. $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+ +2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1)$. 2000. $f(x+h, y+k, z+l)= =f(x,y,z)+2[h(x-y-z)+k(y-x-z)+l(z-x-y)]+f(h,k,l)$. 2001. $y+xy+\frac{3x^2y-y^3}{3!}$. 2002. $1-\frac{x^2+y^2}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$. 2003. $1+(y-1)+(x-1)(y-1)$. 2004. $1+[(x-1)+(y+1)]+\frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!}+ +\frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$. 2005. a) $\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{1-\beta}\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\times \times(\alpha^2-\beta^2)$; b) $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}\approx 1+\frac{1}{4}(m\alpha+n\beta)+\frac{1}{32}\times \times[(3m^2-4m)\alpha^2-2mn\alpha\beta+(3n^2-4n)\beta^2]$. 2006. a) 1,0081; b) 0,902. Indication. Appliquer la formule de Taylor aux fonctions: a) $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ au voisinage du point (1, 1); b) $f(x,y)=y^x$ au voisinage du point (2, 1). 2007. $z=1+2(x-1)-(y-1)-8\times \times(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\ldots$ 2008. $z_{\min}=0$ pour $x=1$, $y=0$. 2009. Il n'y a pas d'extrémum. 2010. $z_{\min}=-1$ pour $x=1$, $y=0$. 2011. $z_{\max}=108$, pour $x=3$, $y=2$. 2012. $z_{\min}=-8$ pour $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ et pour $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$. Pour $x=y=0$ il n'y a pas d'extrémum. 2013. $z_{\max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ aux points $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ et $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$; $z_{\min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ aux points $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$ et $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$. 2014. $z_{\max}=1$ pour $x=y=0$. 2015. $z_{\min}=0$ pour $x=y=0$, maximum faible non strict $\left(z=\frac{1}{e}\right)$ pour les points de la circonférence $x^2+y^2=1$. 2016. $z_{\max}= =\sqrt{3}$ pour $x=1$ et $y=-1$. 2017. $u_{\min}=-\frac{4}{3}$ pour $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=1$. 2018. $u_{\min}=4$ pour $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$. 2019. L'équation détermine deux fonctions, dont l'une a un maximum ($z_{\max}=8$) pour $x=1$, $y=-2$ et l'autre un minimum ($z_{\min}=-2$) pour $x=1$, $y=-2$. Pour les points de la circonférence $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ chacune de ces fonctions a un extrémum ($z=3$). Indication. Les fonctions mentionnées dans la réponse sont définies explicitement par les formules $z=3\pm\sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$ et existent, par conséquent, seulement à l'intérieur et sur la circonférence frontière $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ où les deux fonctions prennent la valeur $z=3$. Cette valeur est la plus petite pour la première fonction et la plus grande pour la seconde. 2020. L'une des fonctions définie par l'équation a un maximum ($z_{\max}=-2$) pour $x=-1$, $y=2$, l'autre a un minimum ($z_{\min}=1$) pour $x=-1$, $y=2$; b) les deux fonctions ont un extrémum pour les points de la courbe $4x^3-4y^2-12x+$

$+16y-33=0$. 2021. $z_{\max}=\frac{1}{4}$ pour $x=y=\frac{1}{2}$. 2022. $z_{\max}=5$ pour $x=1$, $y=2$; $z_{\min}=-5$ pour $x=-1$, $y=-2$. 2023. $z_{\min}=\frac{36}{13}$ pour $x=\frac{18}{13}$, $y=\frac{12}{13}$. 2024. $z_{\max}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ pour $x=\frac{7\pi}{8}+k\pi$, $y=\frac{9\pi}{8}+k\pi$, $z_{\min}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$, $y=\frac{5\pi}{8}+k\pi$. 2025. $u_{\min}=-9$ pour $x=-1, y=2, z=-2$; $u_{\max}=9$ pour $x=1, y=-2, z=2$. 2026. $u_{\max}=a$ pour $x=\pm a$, $y=z=0$; $u_{\min}=c$ pour $x=y=0$, $z=\pm c$. 2027. $u_{\max}=2\cdot 4^2\cdot 6^3$ pour $x=2$, $y=4$, $z=6$. 2028. $u_{\max}=4\frac{4}{27}$ aux points $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$; $u_{\min}=4$ aux points (2, 2, 1) (2, 1, 2) (1, 2, 2). 2030. a) La plus grande valeur est $z=3$ pour $x=0$, $y=1$, b) la plus grande valeur est $z=2$, pour $x=1$, $y=0$. 2031. a) La plus grande valeur est $z=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ pour $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=\sqrt{\frac{1}{3}}$; la plus petite valeur est $z=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ pour $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=-\sqrt{\frac{1}{3}}$; b) la plus grande valeur est $z=1$ pour $x=\pm 1$, $y=0$; la plus petite valeur est $z=-1$ pour $x=0$, $y=\pm 1$. 2032. La plus grande valeur est $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ pour $x=y=\frac{\pi}{3}$ (maximum intérieur); la plus petite valeur est $z=0$ pour $x=y=0$ (minimum frontière). 2033. La plus grande valeur est $z=13$ pour $x=2$, $y=-1$ (maximum frontière); la plus petite valeur est $z=-1$ pour $x=y=1$ (minimum intérieur) et pour $x=0$, $y=-1$ (minimum frontière). 2034. Le cube. 2035. $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. 2036. Le triangle équilatère. 2037. Le cube. 2038. $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. 2039. $M\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. 2040. Les côtés du triangle sont $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ et $\frac{p}{2}$. 2041. $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$. 2042. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. 2043. Les dimensions du parallélépipède sont: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, où a, b et c sont les demi-axes de l'ellipsoïde. 2044. $x=y=2\delta+\sqrt[3]{2V}$, $z=\frac{x}{2}$. 2045. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. 2046. Le grand axe est $2a=6$, le petit axe est $2b=2$. Indication. Le carré de la distance du point (x, y) de l'ellipse à son centre (origine des coordonnées) est x^2+y^2. Le problème revient à trouver l'extrémum de la fonction x^2+y^2 avec

la condition $5x^2+8xy+5y^2=9$. 2047. Le rayon de base du cylindre est $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$, la hauteur $R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$, où R est le rayon de la boule. 2048. Le canal doit réunir le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ de la parabole au point $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$ de la droite; sa longueur est $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. 2049. $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$. 2050. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. Indication. Il est évident que le point M, par lequel le rayon passe d'un milieu à l'autre, doit se trouver entre les points A_1 et B_1 avec $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M=b\operatorname{tg}\beta$. La durée de la progression du rayon est $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. Le problème se ramène à la détermination du minimum de la fonction $f(\alpha, \beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ avec la condition $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=c$. 2051. $\alpha=\beta$. 2052. $I_1:I_2:I_3=\frac{I}{R_1}:\frac{I}{R_2}:\frac{I}{R_3}$. Indication. Trouver le minimum de la fonction $f(I_1, I_2, I_3)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3$ avec la condition $I_1+I_2+I_3=I$. 2053. Le point isolé (0, 0). 2054. Le point de rebroussement de seconde espèce (0, 0). 2055. Le point d'auto-osculation (0, 0). 2056. Le point isolé (0, 0). 2057. Le point double (0, 0). 2058. Le point de rebroussement de première espèce (0, 0). 2059. Le point double (0, 0). 2060. Le point double (0, 0). 2061. L'origine des coordonnées est un point isolé si $a>b$, un point de rebroussement de première espèce si $a=b$ et un point double si $a<b$. 2062. Si a, b, c sont tous les trois différents, la courbe n'a pas de point singulier. Si $a=b<c$, alors $A(a; 0)$ est un point isolé; si $a<b=c$, alors le point $B(b, 0)$ est un point double; si $a=b=c$, alors $A(a, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce. 2063. $y=\pm x$. 2064. $y^2=2px$. 2065. $y=\pm R$. 2066. $x^{2/3}+y^{2/3}=i^{2/3}$. 2067. $xy=\frac{1}{2}S$. 2068. Deux hyperboles équilatères conjuguées dont les équations, si on prend les axes de symétrie des ellipses comme axes de coordonnées, sont de la forme $xy=\pm\frac{S}{2\pi}$. 2069. a) La courbe discriminante $y=0$ est le lieu géométrique des points d'inflexion et l'enveloppe de la famille donnée; b) la courbe discriminante $y=0$ est le lieu géométrique des points de rebroussement et l'enveloppe de la famille; c) la courbe discriminante $y=0$ est le lieu géométrique des points de rebroussement mais n'est pas une enveloppe; d) la courbe discriminante se décompose en les droites $x=0$ (lieu géométrique du point double) et $x=a$ (enveloppe). 2070. $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$. 2071. $7\frac{1}{3}$. 2072. $\sqrt{9+4\pi^2}$. 2073. $\sqrt{3}(e^t-1)$. 2074. 42. 2075. 5. 2076. x_0+z_0. 2077. $11+\frac{\ln 10}{9}$.

2079. a) droite ; b) parabole ; c) ellipse ; d) hyperbole. 2080. 1) $\frac{da}{dt}\vec{a}^0$; 2) $a\frac{d\vec{a}^0}{dt}$; 3) $\frac{da}{dt}\vec{a}^0+a\frac{d\vec{a}^0}{dt}$. 2081. $\frac{d}{dt}(\vec{a}^0\vec{b}\vec{c})=\left(\frac{d\vec{a}^0}{dt}\vec{b}\vec{c}\right)+\left(\vec{a}^0\frac{d\vec{b}}{dt}\vec{c}\right)+$ $+\left(\vec{a}^0\vec{b}\frac{d\vec{c}}{dt}\right)$. 2082. $4t(t^2+1)$. 2083. $x=3\cos t$; $y=4\sin t$ (ellipse) ; pour $t=0$, $\vec{v}=4\vec{j}$, $\vec{w}=-3\vec{i}$; pour $t=\frac{\pi}{4}$, $\vec{v}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}$, $\vec{w}=-$ $-\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i}-2\sqrt{2}\vec{j}$; pour $t=\frac{\pi}{2}$, $\vec{v}=-3\vec{i}$, $\vec{w}=-4\vec{j}$. 2084. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3t$ (hélice) ; $\vec{v}=-2\vec{i}\sin t+2\vec{j}\cos t+3\vec{k}$; $v=\sqrt{13}$ pour t quelconque ; $\vec{w}=-2\vec{i}\cos t-2\vec{j}\sin t$; $w=2$ pour t quelconque ; pour $t=0$ $\vec{v}=2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{w}=-2\vec{i}$; pour $t=\frac{\pi}{2}$ $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{w}=-2\vec{j}$. 2085. $x=\cos\alpha\cos\omega t$, $y=\sin\alpha\cos\omega t$, $z=\sin\omega t$ (circonférence) ; $\vec{v}=$ $=-\omega\vec{i}\cos\alpha\sin\omega t-\omega\vec{j}\sin\alpha\sin\omega t+\omega\vec{k}\cos\omega t$; $v=|\omega|$; $\vec{w}=$ $=-\omega^2\vec{i}\cos\alpha\cos\omega t-\omega^2\vec{j}\sin\alpha\cos\omega t-\omega^2\vec{k}\sin\omega t$; $w=w^2$. 2086. $v=$ $=\sqrt{v_{x_0}^2=v_{y_0}^2+(v_{x_0}-gt)^2}$; $w_x=w_y=0$; $w_z=-g$; $w=g$. 2088. $\omega\sqrt{a^2+h^2}$, où $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire de rotation de l'hélice. 2089. $\sqrt{a^2\omega^2+v_0^2-2a\omega v_0\sin\omega t}$. 2090. $\vec{\tau}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})$; $\vec{\nu}=$ $=-\vec{j}$; $\vec{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{k})$. 2091. $\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos t-\sin t)\vec{i}+(\sin t+\cos t)\times$ $\times\vec{j}+\vec{k}]$; $\vec{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sin t+\cos t)\vec{i}+(\sin t-\cos t)\vec{j}]$; $\cos(\widehat{\vec{\tau},\vec{z}})=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cos(\widehat{\vec{\nu},\vec{z}})=0$. 2092. $\vec{\tau}=\frac{\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{21}}$; $\vec{\nu}=\frac{-4\vec{i}+5\vec{j}-8\vec{k}}{\sqrt{105}}$; $\vec{\beta}=\frac{-2\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{5}}$. 2093. $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}$ (tangente) ; $\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=$ $=\frac{z-bt}{a}$ (binormale) ; $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}=\frac{z-bt}{0}$ (normale principale). Les cosinus directeurs de la tangente sont $\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta=-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Les cosinus directeurs de la normale principale sont $\cos\alpha_1=\cos t$, $\cos\beta_1=\sin t$, $\cos\gamma_1=0$. 2094. $2x-$ $-z=0$ (plan normal) ; $y-1=0$ (plan osculateur) ; $x+2z-5=0$ (plan rectifiant). 2095. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-8}{12}$ (tangente) ; $x+4y+12z-114=0$

(plan normal); $12x-6y+z-8=0$ (plan osculateur). 2096. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=$ $=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$ (tangente); $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^3+2t}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{1-t^4}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{-2t^3-t}$ (normale principale); $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{1}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{-2t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{t^2}$ (binormale); $M_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(4, -\frac{8}{3}, 2\right)$. 2097. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$ (tangente); $x+y=0$ (plan osculateur); $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ (normale principale); $\frac{x-2}{1}=$ $=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$ (binormale); $\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma_2=0$.

2098. a) $\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}R}{-\sqrt{2}}$ (tangente); $x\sqrt{2}-z=0$ (plan normal); b) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4}$ (tangente); $x+y+4z-10=0$ (plan normal); c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}}=\frac{y-2\sqrt{3}}{1}=\frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$ (tangente); $2\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}z=0$ (plan normal). 2099. $x+y=0$. 2100. $x-y-z\sqrt{2}=0$. 2101. a) $4x-y-$ $-z-9=0$; b) $9x-6y+2z-18=0$; c) $b^2x_0^3x-a^2y_0^3y+(a^2-b^2)z_0^3z=$ $=a^2b^2(a^2-b^2)$. 2102. $6x-8y-z+3=0$ (plan osculateur); $\frac{x-1}{31}=$ $=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$ (normale principale); $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{1}$ (binormale). 2103. $bx-z=0$ (plan osculateur); $\left.\begin{matrix}x=0\\z=0\end{matrix}\right\}$ (normale principale); $\left.\begin{matrix}x+bz=0\\y=0\end{matrix}\right\}$ (binormale); $\vec{\tau}=\frac{\vec{i}+b\vec{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\vec{\beta}=\frac{-b\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\vec{\nu}=\vec{j}$. 2106. $2x+$ $+3y+19z-27=0$. 2107. a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 2108. a) $K=\frac{e^{-t}\sqrt{2}}{3}$; $T=$ $=\frac{e^{-t}}{3}$; b) $K=T=\frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$. 2109. a) $R=\rho=\frac{(y+a)^2}{a}$; b) $R=\rho=$ $=\frac{(p^4+2x^4)^3}{8p^4x^3}$. 2111. $\frac{av^2}{a^2+b^2}$. 2112. Pour $t=0$ $K=2$, $w_\tau=0$, $w_n=2$; pour $t=1$ $K=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$, $w_\tau=\frac{22}{\sqrt{14}}$, $w_n=2\sqrt{\frac{19}{14}}$.

Chapitre VII

2113. $4\frac{2}{3}$. 2114. $\ln\frac{25}{24}$. 2115. $\frac{\pi}{12}$. 2116. $\frac{9}{4}$. 2117. 50,4. 2118. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2119. 2,4. 2120. $\frac{\pi}{6}$. 2121. $x=\frac{y^2}{4}-1$; $x=2-y$; $y=-6$; $y=2$. 2122. $y=x^2$; $y=x+9$; $x=1$; $x=3$. 2123. $y=x$; $y=10-x$; $y=0$; $y=4$. 2124. $y=\frac{x}{3}$; $y=2x$; $x=1$; $x=3$. 2125. $y=0$; $y=\sqrt{25-x^2}$; $x=0$; $x=3$. 2126. $y=x^2$; $y=x+2$; $x=-1$; $x=2$. 2127. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,y)\,dx=$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy.$$ 2128. $$\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)\,dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy.$$

2129. $$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

2130. $$\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,y)\,dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_1^2 f(x,y)\,dx+$$

$$+\int\limits_5^7 dy\int\limits_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)\,dx.$$ 2131. $$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^{y} f(x,y)\,dx+$$

$$+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy+$$

$$+\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$ 2132. $$\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{2x^2}^2 f(x,y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx.$$ 2133. $$\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+$$

$$+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+$$

$$+\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx.$$ **2134.** $$\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy +$$

$$+\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\,dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,dx.$$ **2135.** a) $$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y)\,dx;$$ b) $$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx;$$ c) $$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y)\,dx;$$ d) $$\int_{-1}^{1} dx \int_x^1 f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{y} f(x, y)\,dx;$$ e) $$\int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_a^{2a} dx \int_0^a f(x, y)\, dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^{a} f(x, y)\, dy.$$

2136. $\int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y)\, dx.$ 2137. $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\, dx +$

$$+ \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)\, dx.$$ 2138. $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx +$

$$+ \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$$ 2139. $\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x, y)\, dx +$

$$+ \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x, y)\, dx.$$ 2140. $\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx +$

$$+ \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx + \int_0^{2\sqrt{2a}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\, dx.$$

2141. $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy.$

2142. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x, y)\, dy +$

$$+ \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\, dy.$$ 2143. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2144. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\, dx.$

2145. $\frac{1}{6}$. 2146. $\frac{1}{6}$. 2147. $\frac{\pi}{2}a$. 2148. $\frac{\pi}{6}$. 2149. 6. 2150. $\frac{1}{2}$.

2151. $\ln 2$. 2152. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{15\pi-16}{150}$; c) $2\frac{2}{5}$. 2153. $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$.

2154. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy = \frac{4}{3}$. 2155. $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. 2156. $\frac{5}{2}\pi R^3$.

Indication. $\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy = \int\limits^{2\pi R} dx \int\limits_0^{y=f(x)} y\,dy =$

$= \int\limits_0^{2\pi} R(1-\cos t)\,dt \int\limits^{R(1-\cos t)} y\,dy$, où la dernière intégrale s'obtient de la précédente en faisant le changement de variable $x = R(t-\sin t)$.

2157. $\frac{R^4}{80}$. 2158. $\frac{1}{6}$. 2159. $a^2+\frac{R^2}{2}$.

2160. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$

2161. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r^2)\,dr$. 2162. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$

2163. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} r\,dr +$

$+ \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr.$

2164. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr +$

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{5\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr.$$

2165. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\, dr = \frac{a^3}{12}$. 2166. $\frac{3}{2}\pi a^4$. 2167. $\frac{\pi a^3}{3}$.

2168. $\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right)a^3$. 2169. $\frac{\pi a^3}{6}$. 2170. $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$.

2171. $\frac{2}{3}\pi ab$. Indication. Le jacobien est $I=abr$. Les limites d'intégration sont $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant 1$.

2172. $\int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv,\ uv)\,u\,du$. Solution. On a $x=u(1-v)$ et $y=uv$; le jacobien est $I=u$. On détermine les limites de u comme fonction de v; pour $x=0$ $u(1-v)=0$ d'où $u=0$ (puisque $1-v\neq 0$); pour $x=c$ $u=\frac{c}{1-v}$. Limites de variation de v: puisque $y=\alpha x$, $uv=\alpha u(1-v)$ d'où $v=\frac{\alpha}{1+\alpha}$, pour $y=\beta x$ on trouve $v=\frac{\beta}{1+\beta}$. 2173. $I=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 du \int_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)dv+\right.$

$$\left.+\int_1^2 du \int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)dv\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} dv \int_{-v}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)du+\int_0^1 dv \int_v^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)du\right].$$

Indication. Après le changement de variables, les équations des côtés du carré sont $u=v$, $u+v=2$, $u-v=2$, $u=-v$.

2171. $ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}+\frac{ab}{hk}\right]$. Solution. L'équation de la courbe est $r^4=r^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)$, d'où la limite inférieure de r est 0 et la limite supérieure $r=\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$.

Puisque r doit être réel, $\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\geqslant 0$, d'où on doit avoir $\operatorname{tg}\varphi\leqslant\frac{ak}{bh}$ dans le premier quart de plan. Du fait que le domaine d'intégration est symétrique par rapport aux axes, on peut calculer le $\frac{1}{4}$ de toute l'intégrale en se limitant au premier quart de plan:

$$\iint\limits_{(S)} dx\,dy=4\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} abr\,dr.$$

2175. a) $4\,\frac{1}{2}$; $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$; b) $\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{2}$;

$\int\limits_0^a dx\int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$. 2176. a) $\frac{9}{2}$; b) $\left(2+\frac{\pi}{4}\right)a^2$. 2177. $\frac{7a^2}{120}$.

2178. $\frac{10}{3}a^2$. 2179. π. Indication. $-1\leqslant x\leqslant 1$. 2180. $\frac{16}{3}\sqrt{15}$.

2181. $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$. 2182. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. 2183. $\frac{5}{4}\pi a^2$. 2184. 6. 2185. 10π. Indication. Faire le changement de variables: $x-2y=u$, $3x+4y=v$. 2186. $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$. 2187. $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$.

2188. $v=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 (1-x)\,dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (1-x)\,dy$. 2193. $\frac{\pi a^3}{6}$. 2194. $\frac{3}{4}$.

2195. $\frac{1}{6}$. 2196. $\frac{a^3}{3}$. 2197. $\frac{\pi r^4}{4a}$. 2198. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. 2199. $\frac{88}{105}$.

2200. $\frac{a^3}{18}$. 2201. $\frac{abc}{3}$. 2202. $\pi a^3(\alpha-\beta)$. 2203. $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1)$.

2204. $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$. 2205. $\frac{\pi a^3}{3}$. 2206. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2207. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$.

2208. $\frac{32}{9}a^3$. 2209. $\pi a(1-e^{-R^2})$. 2210. $\frac{3\pi ab}{2}$. 2211. $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$.

2212. $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$. Indication. Faire le changement de variables $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$. 2213. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

2214. $4(m-n)R^2$. 2215. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. Indication. Intégrer dans le

plan YOZ. 2216. $4a^2$. 2217. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 2218. $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1)$. 2219. $8a^2$. 2220. $3\pi a^2$. Indication. Passer aux coordonnées polaires. 2221. $\sigma=\frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2}-1\right]$. Indication. Passer aux; coordonnées polaires. 2222. $\frac{16}{9}a^3$ et $8a^2$. Indication. Passer aux coordonnées polaires. 2223. $8a^2 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. Indication. $\sigma=$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=8a\int_0^{\frac{a}{2}} \arcsin\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

Intégrer par parties puis faire le changement de variable $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin t$; transformer la réponse.

2224. $\frac{\pi}{4}\left(b\sqrt{b^2+c^2}-a\sqrt{a^2+c^2}+c^2\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. Indication. Passer aux coordonnées polaires. 2225. $\frac{2\pi\delta R^2}{3}$. 2226. $\frac{a^3b}{12}$; $\frac{a^2b^2}{24}$. 2227. $\bar{x}=\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$; $\bar{y}=\frac{\pi}{6(4-\pi)}$. 2228. $\bar{x}=\frac{5}{6}a$; $\bar{y}=0$. 2229. $\bar{x}=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$; $\bar{y}=0$. 2230. $\bar{x}=\frac{2}{5}$; $\bar{y}=0$. 2231. $I_X=4$. 2232. a) $I_0=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$; b) $I_X=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$. 2233. $I=\frac{2}{3}a^4$. 2234. $\frac{8}{5}a^4$. Indication. $I=\int_0^a dx\int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}}(y+a)^2\,dy$. 2235. $16\ln 2-9\frac{3}{8}$. Indication. La distance du point (x, y) à la droite $x=y$ est $d=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$, qu'on trouve à l'aide de l'équation normale de la droite. 2236. $I=\frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)]$, où k est un coefficient de proportionnalité. Indication. Ayant choisi comme origine des coordonnées le sommet dont la distance à un point est proportionnelle à la densité de la membrane en ce point, dirigeons les axes de coordonnées suivant les côtés du carré. On définit le moment d'inertie par rapport à l'axe OX. En passant aux coordonnées polaires, on a

$$I_x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sec\varphi} kr(r\sin\varphi)^2\,r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} kr(r\sin\varphi)^2\,r\,dr.$$

2237. $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$. 2238. $I_0=\frac{\pi a^4}{2}$. 2239. $\frac{35}{12}\pi a^4$. Indication. Prendre pour variables d'intégration t et y (voir problème 2156).

2240. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x, y, z)\,dz$. 2241. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \times$

$\times \int\limits_0^{H} f(x, y, z)\,dz$. 2242. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x, y, z)\,dz$.

2243. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \cdot \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz$.

2244. $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$. 2245. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. 2246. $\frac{\pi^2a^2}{8}$.

2247. $\frac{1}{720}$. 2248. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. 2249. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

2250. $\frac{59}{480}\pi R^5$. 2251. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 2252. $\frac{4}{5}\pi abc$. 2253. $\frac{\pi h^2R^2}{4}$.

2254. πR^3. 2255. $\frac{8}{9}a^2$. 2256. $\frac{8}{3}r^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2257. $\frac{4}{15}\pi R^5$.

2258. $\frac{\pi}{10}$. 2259. $\frac{32}{9}a^2h$. 2260. $\frac{3}{4}\pi a^3$.

Solution. $v=2\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int\limits_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dz=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,dr \times$

$\times \int\limits_0^{\frac{r^2}{2a}} dh=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \frac{r^3\,dr}{2a}=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a\cos\varphi)^4}{4}d\varphi=\frac{3}{4}\pi a^3$.

2261. $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. Indication. Passer aux coordonnées sphériques.

2262. $\frac{19}{6}\pi$. Indication. Passer aux coordonnées cylindriques.

2263. $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$. 2264. πabc. 2265. $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. 2266. $\frac{ab}{24}\times$

$\times(6c^2-a^2-b^2)$. 2267. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{2}{5}a$. Indication. Introduire les coordonnées sphériques. 2268. $\bar{x}=\frac{4}{3}$, $\bar{y}=0$, $\bar{z}=0$.

2269. $\frac{\pi a^2 h}{12}(3a^2+4h^2)$. Indication. On prend l'axe du cylindre comme axe OZ et le plan de la base du cylindre comme plan XOY. On calcule le moment d'inertie par rapport à l'axe OX. Après avoir passé aux coordonnées cylindriques, le carré de la distance de l'élément $r\,d\varphi\,dr\,dz$ à l'axe OX est $r^2\sin^2\varphi+z^2$. 2270. $\frac{\pi\rho h a^2}{60}\times$ $\times(2h^2+3a^2)$. Indication. On prend la base du cône pour plan XOY, l'axe du cône pour axe OZ. On calcule le moment d'inertie par rapport à l'axe OX. Après avoir passé aux coordonnées cylindriques, on a pour les points de la surface conique $r=\frac{a}{h}(h-z)$; le carré de la distance de l'élément $r\,d\varphi\,dr\,dz$ à l'axe OX est $r^2\sin^2\varphi+z^2$. 2271. $2\pi k\rho h\,(1-\cos\alpha)$, où k est un coefficient de proportionnalité et ρ la densité. Solution. On place l'origine des coordonnées au sommet du cône, on prend son axe pour axe OZ. Si on introduit des coordonnées sphériques, l'équation de la surface latérale du cône est $\psi=\frac{\pi}{2}-\alpha$ et l'équation du plan contenant la base $r=\frac{h}{\sin\psi}$. Il résulte de la symétrie du corps que la tension résultante est dirigée suivant l'axe OZ. La masse de l'élément de volume $dm=$ $=\rho r^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr$, où ρ est la densité. La composante suivant l'axe OZ de l'attraction par cet élément de la masse unité concentrée au point O est $\frac{k\,dm}{r^2}\sin\psi=k\rho\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr$. L'attraction résultante est $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}d\psi\int\limits_0^{h\operatorname{cosec}\psi}k\rho\sin\psi\cos\psi\,dr$. 2272. Solution. Introduisons les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) d'origine au centre de la boule d'axe OZ passant par le point matériel de masse m. La distance de ce point au centre de la boule est désignée par ξ. Soit $r=\sqrt{\rho^2+(\xi-z)^2}$ la distance du volume élémentaire dv à la masse m. La force d'attraction de l'élément de volume dv de la boule et du point matériel m est dirigée suivant r et a pour grandeur $-k\gamma m\frac{dv}{r^2}$, où $\gamma=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ est la densité de la boule et $dv=\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz$ e volume élémentaire. La projection de cette force sur l'axe OZ est

$$dF=-\frac{km\gamma\,dv}{r^2}\cos(\widehat{rv})=-km\gamma\frac{\xi-z}{r^3}\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz.$$

D'où

$$F=-km\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-R}^{R}(\xi-z)\,dz\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\,d\rho}{r^3}=km\gamma\frac{4}{3}\pi R^3\frac{1}{\xi^2},$$

or, $\frac{4}{3}\gamma\pi R^3=M$, donc $F=\frac{kMm}{\xi^2}$. 2273. $-\int\limits_x^{\infty}y^2e^{-xy^2}\,dy-e^{-x^3}$.

2275. a) $\frac{1}{p}$ $(p>0)$; b) $\frac{1}{p-\alpha}$ pour $p>\alpha$; c) $\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$ $(p>0)$; d) $\frac{p}{p\ +\beta^2}$ $(p>0)$. 2276. $-\frac{1}{n^2}$. 2277. $\frac{2}{p^3}$. Indication. Dériver de fois $\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}$. 2278. $\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 2279. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. 2280. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$. 2281. $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. 2282. $\operatorname{arcctg}\frac{\alpha}{\beta}$. 2283. 1. 2284. $\frac{1}{2}$. 2285. $\frac{\pi}{4}$. 2286. $\frac{\pi}{4a^2}$. Indication. Passer aux coordonnées polaires. 2287. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 2288. $\frac{\pi^2}{8}$. 2289. Converge. Solution. Retrancher de S l'origine des coordonnées et son voisinage, c'est-à-dire considérer l'intégrale $I_\varepsilon=\iint\limits_{(S_\varepsilon)}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, où le domaine retranché est le cercle de rayon ε de centre à l'origine des coordonnées. En passant aux coordonnées polaires, on a $I_\varepsilon=\int\limits_0^\infty d\varphi\int\limits_\varepsilon^1 r\cdot\ln r\,dr=\int\limits_\varepsilon^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_\varepsilon^1-\frac{1}{2}\int\limits_\varepsilon^1 r\,dr\right]d\varphi=2\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{4}-\right.$ $\left.-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon-\frac{1}{4}\right)$. D'où $\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_\varepsilon=-\frac{\pi}{2}$. 2290. Converge pour $\alpha>1$. 2291. Converge. Indication. On entoure la droite $y=x$ d'une tranche mince et on pose

$$\iint\limits_{(S)}\frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}+\lim_{\delta\to0}\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x+\delta}^1\times$$
$$\times\frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}.$$

2292. Converge pour $\alpha>\frac{3}{2}$. 2293. 0. 2294. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 2295. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. 2296. $\frac{256}{15}a^3$. 2297. $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. 2298. $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$. 2299. $a^2\sqrt{2}$. 2300. $\frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1)$. 2301. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$. 2302. $2\pi a^2$. 2303. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. Indication. $\int\limits_C f(x,y)\,ds$ peut être interprétée géométriquement

comme l'aire de la surface cylindrique de génératrice parallèle à l'axe OZ, de base le contour d'intégration et de hauteurs les valeurs de la fonction à intégrer. Donc $S=\int\limits_C x\,ds$, où C est l'arc OA de la parabole $y=\frac{3}{8}x^2$ réunissant les points (0, 0) et (4, 6).

2304. $a\sqrt{3}$. 2305. $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$.

2306. $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)$.

2307. $\left(\frac{4}{3}a;\ \frac{4}{3}a\right)$. 2308. $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. 2309. $\frac{kMmb}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}$.

2310. $40\frac{19}{30}$. 2311. $-2\pi a^2$. 2312. a) $\frac{4}{3}$; b) 0; c) $\frac{12}{5}$; d) -4; e) 4. 2313. 4 pour tous les cas. 2314. -2π. Indication. Utiliser les équations paramétriques du cercle. 2315. $\frac{4}{3}ab^2$. 2316. $-2\sin 2$.

2317. 0. 2318. a) 8; b) 12; c) 2; d) $\frac{3}{2}$; e) $\ln(x+y)$; f) $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+$ $+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. 2319. a) 62; b) 1; c) $\frac{1}{4}+\ln 2$; d) $1+\sqrt{2}$.

2320. $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. 2322. a) $x^2+3xy-2y^2+C$; b) x^3-x^2y+ $+xy^2-y^3+C$; c) $e^{x-y}(x+y)+C$; d) $\ln|x+y|+C$. 2323. $-2\pi\alpha\times$ $\times(a+b)$. 2324. $-\pi R^2\cos^2\alpha$. 2325. $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$. 2326. a) -20; b) $abc-1$; c) $5\sqrt{2}$; d) 0. 2327. $I=\iint\limits_{(S)}y^2\,dx\,dy$. 2328. $-\frac{4}{3}$.

2329. $\frac{\pi R^4}{2}$. 2330. $-\frac{1}{3}$. 2331. 0. 2332. a) 0; b) $2n\pi$. Indication. Dans le cas b) on applique la formule de Green au domaine compris entre le contour C et un cercle de rayon suffisamment petit de centre à l'origine des coordonnées. 2333. Solution. Si on prend en considération que le sens de la tangente coïncide avec le sens positif de parcours du contour, alors $\cos(X, n)=\cos(Y, t)=$ $=\frac{dy}{ds}$, donc $\oint\limits_C\cos(X, n)\,ds=\oint\limits_C\frac{dy}{ds}\,ds=\oint\limits_C dy=0$. 2334. $2S$, où S est l'aire de la figure limitée par le contour C. 2335. -4. Indication. On ne peut pas appliquer la formule de Green. 2336. πab. 2337. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2338. $6\pi a^2$. 2339. $\frac{3}{2}a^2$. Indication. Poser $y=tx$,

où t est un paramètre. 2340. $\frac{a^2}{60}$. 2341. $\pi(R+r)(R+2r)$, $6\pi R^2$ pour $R=r$. Indication. L'équation de l'épicycloïde est $x=(R+r)\times$ $\times\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{R+r}{r}t$, où t est l'angle de rotation du rayon du cercle fixe qui passe par le point de tangence. 2342. $\pi(R-r)(R-2r)$, $\frac{3}{8}\pi R^2$ pour $r=\frac{R}{4}$. Indication. On déduit l'équation de l'hypocycloïde de l'équation de l'épicycloïde correspondante (voir problème 2341) en remplaçant r par $-r$. 2343. FR. 2344. $mg(z_1-z_2)$. 2345. $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$, où k est un coefficient de proportionnalité. 2346. a) Le potentiel est $U=-mgz$, le travail est $mg(z_1-z_2)$; b) le potentiel est $U=\frac{\mu}{r}$, le travail est $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; c) le potentiel est $U=-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$, le travail est $\frac{k^2}{2}(R^2-r^2)$. 2347. $\frac{8}{3}\pi a^4$. 2348. $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. 2349. 0. 2350. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2351. $\frac{\pi a^4}{2}$. 2352. $\frac{3}{4}$. 2353. $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. 2354. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. 2355. a) 0; b) $-\iint\limits_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$. 2356. 0. 2357. 4π. 2358. $-\pi a^2$. 2359. $-a^3$. 2360. $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 2361. 0. 2362. $2\iint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$. 2363. $2\iiint\limits_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 2364. $\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$. 2365. $3a^4$. 2366. $\frac{a^3}{2}$. 2367. $\frac{12}{5}\pi a^5$. 2368. $\frac{\pi a^2b^2}{2}$. 2371. Sphères, cylindres. 2372. Cônes. 2373. Circonférences $x^2+y^2=c_1^2$, $z=c_2$. 2376. grad $U(A)=9\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$; $|\text{grad } U(A)|=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$; $z^2=xy$; $x=y=z$. 2377. a) $\frac{\vec{r}}{r}$; b) $2\vec{r}$; c) $-\frac{\vec{r}}{r^3}$; d) $f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$. 2378. grad $(\vec{c}\vec{r})=\vec{c}$; les surfaces de niveau sont les plans perpendiculaires au vecteur $\vec{c}$. 2379. $\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{2U}{r}$, $\frac{\partial U}{\partial r}=|\text{grad } U|$ pour $a=b=c$. 2380. $\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{\cos(\vec{l},\vec{r})}{r^2}$; $\frac{\partial U}{dl}=0$ pour $\vec{l}\perp\vec{r}$. 2382. $\frac{2}{r}$. 2883.

$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$. 2385. a) $\operatorname{div}\vec{r}=3$, $\operatorname{rot}\vec{r}=0$; b) $\operatorname{div}(r\vec{c})=$ $=\frac{\vec{r}\vec{c}}{r}$, $\operatorname{rot}(\vec{r}\vec{c})=\frac{\vec{r}\times\vec{c}}{r}$; c) $\operatorname{div}(f(r)\vec{c})=\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\vec{r})$, $\operatorname{rot}(f(r)\times$ $\times\vec{c})=\frac{f'(r)}{r}\vec{c}\times\vec{r}$. 2386. $\operatorname{div}\vec{v}=0$, $\operatorname{rot}\vec{v}=2\vec{\omega}$, où $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$.

2387. $2\omega\vec{n}^0$, où $\vec{n}^0$ est le vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation. 2388. $\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}$; $\operatorname{rot}\operatorname{grad}U=0$.

2391. $3\pi R^2H$. 2392. a) $\frac{1}{10}\pi R^2H(3R^2+2H^2)$; b) $\frac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2)$. 2393. $\operatorname{div}\vec{F}=0$, en tous les points sauf à l'origine des coordonnées. Le flux est égal à $-4\pi m$. Indication. Utiliser le théorème d'Ostrogradski-Gauss pour calculer le flux. 2394. $2\pi^2h^2$. 2395. $\frac{-\pi R^2}{8}$. 2396. $U=\int\limits_{r_0}^{r}rf(r)\,dr$. 2397. $\frac{m}{r}$. 2398. a) N'a pas de potentiel; b) $U=xyz+C$; c) $U=xy+xz+yz+C$. 2400. Oui.

Chapitre VIII

2401. $\frac{1}{2n-1}$. 2402. $\frac{1}{2n}$. 2403. $\frac{n}{2^{n-1}}$. 2404. $\frac{1}{n^2}$. 2405. $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. 2406. $\frac{2n}{3n+2}$. 2407. $\frac{1}{n(n+1)}$. 2408. $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}$. 2409. $(-1)^{n+1}$. 2410. $n^{(-1)^{n+1}}$. 2416. Diverge. 2417. Converge. 2418. Diverge. 2419. Diverge. 2420. Diverge. 2421. Diverge. 2422. Diverge. 2423. Diverge. 2424. Diverge. 2425. Converge. 2426. Converge. 2427. Converge. 2428. Converge. 2429. Converge. 2430. Converge. 2431. Converge. 2432. Converge. 2433. Converge. 2434. Diverge. 2435. Diverge. 2436. Converge. 2437. Diverge. 2438. Converge. 2439. Converge. 2440. Converge. 2441. Diverge. 2442. Converge. 2443. Converge. 2444. Converge. 2445. Converge. 2446. Converge. 2447. Converge. 2448. Converge. 2449. Converge. 2450. Diverge. 2451. Converge. 2452. Diverge. 2453. Converge. 2454. Diverge. 2455. Diverge. 2456. Converge. 2457. Diverge. 2458. Converge. 2459. Diverge. 2460. Converge. 2461. Diverge. 2462. Converge. 2463. Diverge. 2464. Converge. 2465. Converge. 2466. Converge. 2467. Diverge. 2468. Diverge. Indication. $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$. 2470. Semi-convergente. 2471. Semi-convergente. 2472. Absolument convergente. 2473. Diverge. 2474. Semi-convergente. 2475. Converge absolument. 2476. Semi-convergente. 2477. Absolument convergente. 2478. Absolument convergente. 2479. Diverge. 2480. Absolument convergente. 2481. Semi-convergente. 2482. Absolument convergente. 2484. a) Diverge; b) absolument convergente; c) diverge; d) semi-convergente. Indi-

cation. Considérer la série $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k})$ pour les exemples a) et) d), et pour les exemples b) et c) étudier séparément les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$. 2485. Diverge. 2486. Absolument convergente. 2487. Absolument convergente. 2488. Semi-convergente. 2489. Diverge. 2490. Absolument convergente. 2491. Absolument convergente. 2492. Absolument convergente. 2493. Oui. 2494. Non. 2495. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$; converge. 2496. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$; converge. 2497. Diverge. 2499. Converge. 2500. Converge. 2501. $|R_4|<\frac{1}{120}$, $|R_5|<\frac{1}{720}$; $R_4<0$, $R_5>0$. 2502. $R_n<\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{2^n(2n+1)n!}$. Indication. On peut évaluer le reste de la série à l'aide de la somme d'une progression géométrique supérieure à ce reste: $R_n=$ $=a_n\left[\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right]<a_n\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\right.$ $\left.+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]$. 2503. $R_n<\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$; $R_{10}<3\cdot10^{-8}$. 2504. $\frac{1}{n+1}<R_n<\frac{1}{n}$. Solution. $R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots$ $\ldots>\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+$ $+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots=\frac{1}{n+1}$; $R_n<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$ $\ldots=\frac{1}{n}$. 2505. Pour la série donnée, on peut facilement trouver la valeur exacte du reste $R_n=\frac{1}{15}\left(n+\frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$.

Solution. $R_n=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+(n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}+\ldots$

En multipliant par $\left(\frac{1}{4}\right)^2$:

$$\frac{1}{16}R_n=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}+(n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4}+\ldots$$

D'où on trouve

$$\frac{15}{16}R_n=n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4}+\ldots=$$

$$=n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{1-\frac{1}{16}}=\left(n+\frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

D'où on détermine la valeur de R_n indiquée ci-dessus. En faisant $n=0$, on trouve la somme de la série $S=\left(\frac{16}{15}\right)^2$. 2506. 99; 999. 2507. 2; 3; 5. 2508. $S=1$. Indication. $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. 2509. $S=1$ pour $x>0$, $S=-1$ pour $x<0$, $S=0$ pour $x=0$. 2510. Pour $x>1$ converge absolument, pour $x\leqslant 1$ diverge. 2511. Pour $x>1$ converge absolument, pour $0<x\leqslant 1$ converge non absolument, pour $x\leqslant 0$ diverge. 2512. Pour $x>e$ converge absolument, pour $1<x\leqslant e$ converge non absolument, pour $x\leqslant 1$ diverge. 2513. $-\infty<x<\infty$. 2514. $-\infty<x<\infty$. 2515. Absolument convergente pour $x>0$, diverge pour $x\leqslant 0$. Solution. 1) $|a_n|\leqslant\frac{1}{e^{nx}}$ et pour $x>0$ la série de terme générale $\frac{1}{e^{nx}}$ converge; 2) $\frac{1}{e^{nx}}\geqslant 1$ pour $x\leqslant 0$, et $\cos nx$ ne tend pas vers 0 pour $n\to\infty$, puisque de $\cos nx\to 0$ découlerait que $\cos 2nx\to -1$; ainsi, pour $x\leqslant 0$ le critère nécessaire de convergence n'a pas lieu. 2516. Converge absolument pour $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; elle diverge pour les autres points. 2517. Diverge partout. 2518. Converge absolument pour $x\neq 0$. 2519. $x>1$, $x\leqslant -1$. 2520. $x>3$, $x<1$. 2521. $x\geqslant 1$, $x\leqslant -1$. 2522. $x\geqslant 5\frac{1}{3}$, $x<4\frac{2}{3}$. 2523. $x>1$, $x<-1$. 2524. $-1<x<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x<1$. Indication. Pour ces valeurs de x, les séries $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k x^k}$ convergent. Pour $|x|\geqslant 1$ et pour $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ le terme général de la série ne tend pas vers zéro. 2525. $-1<x<0$, $0<x<1$. 2526. $-1<x<1$. 2527. $-2\leqslant x<2$. 2528. $-1<x<1$. 2529. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. 2530. $-1<x\leqslant 1$. 2531. $-1<x<1$. 2532. $-1<x<1$. 2533. $-\infty<x<\infty$. 2534. $x=0$. 2535. $-\infty<x<\infty$. 2536. $-4<x<4$. 2537. $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$. 2538. $-2<x<2$. 2539. $-e<x<e$. 2540. $-3\leqslant x<3$. 2541. $-1<x<1$. 2542. $-1<x<1$. Solution. La divergence de la série pour $|x|\geqslant 1$ est évidente (il est cependant intéressant de remarquer que la divergence de la série aux extrémités de l'intervalle de convergence $x=\pm 1$ peut être établie non seulement à l'aide du critère nécessaire de convergence, mais aussi à l'aide du critère de D'Alembert). Pour $|x|<1$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{(n+1)!}}{n!\,x^{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}|(n+1)x^{n!n}|\leqslant\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\left|\frac{1}{x}\right|^n}=0$$

(on établit facilement la dernière égalité à l'aide de la règle de Lhopital). 2543. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Indication. A l'aide du critère de D'Alembert, on peut non seulement déterminer l'intervalle de convergence, mais aussi étudier la convergence de la série donnée aux extrémités de l'intervalle de convergence. 2544. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Indication. A l'aide du critère de Cauchy, on peut non seulement déterminer l'intervalle de convergence, mais aussi faire l'étude de la convergence de la série donnée aux extrémités de l'intervalle de convergence. 2545. $2 < x \leqslant 8$. 2546. $-2 \leqslant x < 8$. 2547. $-2 < x < 4$. 2548. $1 \leqslant x \leqslant 3$. 2549. $-4 \leqslant x \leqslant -2$. 2550. $x = -3$. 2551. $-7 < x < -3$. 2552. $0 \leqslant x < 4$. 2553. $-\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}$. 2554. $-e-3 < x < e-3$. 2555. $-2 \leqslant x \leqslant 0$. 2556. $2 < x < 4$. 2557. $1 < x \leqslant 3$. 2558. $-3 \leqslant x \leqslant -1$. 2559. $1-\frac{1}{e} < x < 1+\frac{1}{e}$. Indication. Pour $x = 1 \pm \frac{1}{e}$ la série diverge puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$. 2560. $-2 < x < 0$. 2561. $1 < x \leqslant 3$. 2562. $1 \leqslant x < 5$. 2563. $2 \leqslant x \leqslant 4$. 2564. $|z| < 1$. 2565. $|z| < 1$. 2566. $|z-2i| < 3$. 2567. $|z| < \sqrt{2}$. 2568. $z = 0$. 2569. $|z| < \infty$. 2570. $|z| < \frac{1}{2}$. 2576. $-\ln(1-x)$ $(-1 \leqslant x < 1)$. 2577. $\ln(1+x)$ $(-1 < x \leqslant 1)$. 2578. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$. 2579. $\operatorname{arctg} x$ $(|x| \leqslant 1)$. 2580. $\frac{1}{(x-1)^2}$ $(|x| < 1)$. 2581. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $(|x| < 1)$. 2582. $\frac{2}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$. 2583. $\frac{x}{(x-1)^2}$ $(|x| > 1)$. 2584. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)$ $(|x| < 1)$. 2585. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. Indication. Considérer la somme de la série $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ (voir problème 2579) pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 2586. 3. 2587. $a^x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n a}{n!}$, $-\infty < x < \infty$. 2588. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \frac{x^n}{n!} + \ldots\right]$. 2589. $\cos(x+a) = \cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\sin a + \frac{x^4}{4!}\cos a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\left[a + \frac{(n+1)\pi}{2}\right] + \ldots$, $-\infty < x < \infty$. 2590. $\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, $-\infty < x < \infty$. 2591. $\ln(2+x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$, $-2 < x \leqslant 2$.

Indication. Pour étudier le reste utiliser le théorème sur l'intégration des séries entières. 2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$, $|x|<1$. 2593. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<1$. 2594. $xe^{-2x}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}$, $-\infty<x<\infty$. 2595. $e^{x^2}=$ $=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, $-\infty<x<\infty$. 2596. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$. 2597. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. 2598. $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty<x<\infty$. 2599. $2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$. 2600. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(-3<x<3)$. 2601. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^4}{2^5}+$ $+\frac{1\cdot3\cdot5\,x^6}{2\cdot4\cdot6\,2^7}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}+\ldots$ $(-2<x<2)$. 2602. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$. 2603. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$ $\left(-\frac{1}{2}<\right.$ $\left.<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$. 2604. $x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x|\leqslant1)$. 2605. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|\leqslant1)$. 2606. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\ldots$ $\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(|x|\leqslant1)$. 2607. $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+$ $+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(|x|\leqslant1)$. 2608. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$. 2609. $1+$ $+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty<x<\infty)$. 2610. $8+3\times$

$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!} x^n \quad (-\infty < x < \infty)$. 2611. $2+\frac{x}{2^2\cdot 3\cdot 1!}-$

$-\frac{2\cdot x^2}{2^5\cdot 3^2\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5x^3}{2^8\cdot 3^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)\,x^n}{2^{3n-1}\cdot 3^n\cdot n!}+\ldots$

$(-\infty < x < \infty)$. 2612. $\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n \quad (-2<x<2)$.

2613. $1+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3^{2n-1})\,x^{2n}}{(2n)!}\,(|x|<\infty)$. 2614. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}\,(|x|<\sqrt{2})$.

2615. $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1)$. 2616. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$

$\times\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\quad(-\infty<x<\infty)$. 2617. $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}\times$

$\times\,(|x|<\infty)$. 2618. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}\,(|x|\leqslant 1)$. 2619. $x+\frac{1}{2\cdot 5}x^5+$

$+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 9\cdot 2!}x^9+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n(4n+1)\,n!}x^{4n+1}+\ldots\quad(|x|<1)$. 2620. $x+$

$+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots$ 2621. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\ldots$ 2622. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$.

2623. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$ 2624. $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots\right)$.

2625. $x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$ 2626. Indication. Calculer la longueur de l'ellipse en partant des équations paramétriques $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ et développer le résultat obtenu en série entière par rapport à ε. 2628. $x^3-2x^2-5x-2=-78+59(x+4)-$ $-14(x+4)^2+(x+4)^3\,(-\infty<x<\infty)$. 2629. $f(x+h)=5x^3-4x^2-3x+$ $+2+(15x^2-8x-3)\,h+(15x-4)\,h^2+5h^3\quad(-\infty<x<\infty\,;\ -\infty<h<\infty)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\,(0<x\leqslant 2)$. 2631. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$

$(0<x<2)$. 2632. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n\qquad(-2<x<0)$.

2633. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(x+4)^n\qquad(-6<x<-2)$.

2634. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}\quad(-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3})$.

2635. $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(|x|<\infty)$. 2636. $2+\frac{x-4}{2^2}-\frac{1}{4}\times$ $\times\frac{(x-4)^2}{2^4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\frac{(x-4)^3}{2^6}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\frac{(x-4)^4}{2^8}+\ldots+(-1)^{n-1}\times$ $\times\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}\frac{(x-4)^4}{2^{2n}}+\ldots$ $(0\leqslant x\leqslant 8)$. 2637. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$. 2638. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$. 2639. $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n+1}$ $(0<x<\infty)$. Indication. Faire le changement de variable $\frac{1-x}{1+x}=t$ et développer $\ln x$ suivant les puissances de t. 2640. $\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\times$ $\times\left(\frac{x}{1+x}\right)^n+\ldots\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\infty\right)$. 2641. $|R|<\frac{e}{5!}<\frac{1}{40}$. 2642. $|R|<\frac{1}{11}$. 2643. $\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}\approx 0{,}523$. Indication. Pour montrer que l'erreur n'est pas supérieure à 0,001, il faut évaluer le reste à l'aide d'une progression géométrique supérieure à ce reste. 2644. Deux termes, c'est-à-dire $1-\frac{x^2}{2}$. 2645. Deux termes, c'est-à-dire $x-\frac{x^3}{6}$. 2646. Huit termes, c'est-à-dire $1+\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{n!}$. 2647. 99; 999. 2648. 1,92. 2649. 4,8 $|R|<0{,}005$. 2650. 2,087. 2651. $|x|<0{,}69$; $|x|<0{,}39$; $|x|<0{,}22$. 2652. $|x|<$ $<0{,}39$; $|x|<0{,}18$. 2653. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!}\approx 0{,}4931$. 2654. 0,7468. 2655. 0,608. 2656. 0,621. 2657. 0,2505. 2658. 0,026. 2659. $1+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$.

2660. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}-(x+y)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty;-\infty<y<\infty)$.

2661. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$.

2662. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}(y-x)^n$; $|x-y|<1$. Indication. $\frac{1-x+y}{1+x-y}=$ $=-1+\frac{2}{1-(y-x)}$. Avoir recours à une progression géométrique.

2663. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+y^n}{n}$ $(-1\leqslant x<1;\ -1\leqslant y<1)$. Indication. $1-x-y+xy=(1-x)(1-y)$. 2664. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1)$. Indication. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg}x+$ $+\operatorname{arctg}y$ (pour $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$). 2665. $f(x+h,\ y+k)=ax^2+$ $+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bh+ck^2$. 2666. $f(1+h,\ 2+k)-f(1,2)=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^2-2k^3$.

2667. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x-2)+(y+2)]^n}{n!}$. 2668. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left[x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n}}{(2n)!}$.

2669. $1+x+\frac{x^2-y^2}{2!}+\frac{x^3-3xy^2}{3!}+\ldots$ 2670. $1+x+xy+\frac{1}{2}x^2y+\ldots$

2671. $\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; $S(0)=\frac{c_1+c_2}{2}$; $S(\pm\pi)=\frac{c_1+c_2}{2}$. 2672. $\frac{b-a}{4}\pi-\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+$ $+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$; $S(\pm\pi)=\frac{b-a}{2}\pi$. 2673. $\frac{\pi^2}{3}+$ $+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $S(\pm\pi)=\pi^2$. 2674. $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\times$ $\times\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$; $S(\pm\pi)=\operatorname{ch}a\pi$.

2675. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$, si a n'est pas entier; $\sin ax$,

si a est entier; $S(\pm\pi)=0$. 2676. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\right.$ $\left.\times\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$, si a n'est pas entier; $\cos ax$, si a est entier; $S(\pm\pi)=\cos a\pi$. 2677. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$; $S(\pm\pi)=0$.

2678. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$; $S(\pm\pi)=\operatorname{ch} a\pi$.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 2680. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 2681. a) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$; b) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\times$ $\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\frac{\pi^2}{8}$. 2682. a) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, où $b_{2k-1}=$ $=\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}$, et $b_{2k}=-\frac{\pi}{k}$; b) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{\cos nx}{n^2}$; 1) $\frac{\pi^2}{6}$; 2) $\frac{\pi^2}{12}$. 2683. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\times$ $\times\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$; b) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^2+n^2}$.

2684. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$; b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx$.

2685. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; b) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2686. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, où $b_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$, $b_{2k+1}=(-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

2687. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$. 2688. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

2689. $\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$. 2690. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\times\right.$

$\left.\times\cos nx\right]$. 2691. $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$. 2692. $\frac{4}{\pi}\times$

$\times\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$. 2694. Solution. 1) $a_{2n}=$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx.$$

Si on fait le changement de variable $t=\frac{\pi}{2}-x$ dans la première intégrale et $t=x-\frac{\pi}{2}$ dans la seconde, alors, en utilisant l'identité $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, on voit facilement que $a_{2n}=0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$;

2) $b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\times$

$\times\sin 2nx\,dx$. Le même changement de variable que dans le cas 1), et en tenant compte de l'identité préposée $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ conduit à $b_{2n}=0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. 2695. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

2696. $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$. 2697. $\operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times\right.$

$\left.\times\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$. 2698. $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$.

2699. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(n-1)\pi x}{2n-1}$; b) 1. 2700. a) $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$

$\times \dfrac{\sin \dfrac{n\pi x}{l}}{n}$; b) $\dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$. 2701. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \times$ $\times \sin \dfrac{nx}{2}$, où $b_{2k+1} = \dfrac{8}{\pi}\left[\dfrac{\pi^2}{2k+1} - \dfrac{4}{(2k+1)^3}\right]$, $b_{2k} = -\dfrac{4\pi}{k}$; b) $\dfrac{4\pi^2}{3} - 16 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\cos \dfrac{nx}{2}}{n^2}$. 2702. a) $\dfrac{8}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$ $\times \dfrac{\sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos (2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. 2703. $\dfrac{2}{3} -$ $- \dfrac{9}{2\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \cos \dfrac{2n\pi x}{3} + \dfrac{1}{2\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n\pi x}{n^2}$.

Chapitre IX

2704. Oui. 2705. Non. 2706. Oui. 2707. Oui. 2708. Oui. 2709. a) Oui ; b) non. 2710. Oui. 2714. $y - xy' = 0$. 2715. $xy' - 2y = 0$. 2716. $y - 2xy' = 0$. 2717. $x\,dx + y\,dy = 0$. 2718. $y' = y$. 2719. $3y^2 - x^2 = 2xyy'$. 2720. $xyy'(xy^2+1) = 1$. 2721. $y = xy' \ln \dfrac{x}{y}$. 2722. $2xy'' + y' = 0$. 2723. $y'' - y' - 2y = 0$. 2724. $y'' + 4y = 0$. 2725. $y'' - 2y' + y = 0$. 2726. $y'' = 0$. 2727. $y''' = 0$. 2728. $(1+y'^2)\,y''' - 3y'y''^2 = 0$. 2729. $y^2 - x^2 = 25$. 2730. $y = xe^{2x}$. 2731. $y = -\cos x$. 2732. $y = \dfrac{1}{6}(-5e^{-x} + 9e^x - 4e^{2x})$. 2738. 2,593 (valeur exacte $y = e$). 2739. 4,780 (valeur exacte $y = 3(e-1)$). 2740. 0,946 (valeur exacte $y = 1$). 2741. 1,826 (valeur exacte $y = \sqrt{3}$). 2742. $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$. 2743. $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$; $y = 0$. 2744. $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$. 2745. $y = a + \dfrac{Cx}{1+ax}$. 2746. $\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$; $x = 0$. 2747. $y = C \sin x$. 2748. $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1+e^x)$. 2749. $1 + y^2 = \dfrac{2}{1-x^2}$. 2750. $y = 1$. 2751. $\operatorname{arctg}(x+y) = x + C$. 2752. $8x + 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x + C)$. 2753. $x + 2y + 3 \ln|2x + 3y - 7| = C$. 2754. $5x + 10y + C = 3 \ln|10x - 5y + 6|$. 2755. $\rho = \dfrac{C}{1 - \cos\varphi}$ ou $y^2 = 2Cx + C^2$. 2756. $\ln \rho = \dfrac{1}{2\cos^2\varphi} - \ln|\cos\varphi| + C$ ou $\ln|x| - \dfrac{y^2}{2x^2} = C$. 2757. La droite $y = Cx$ ou l'hyperbole $y = \dfrac{C}{x}$. Indication. La tangente est égale à

$\sqrt{y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2}$. 2758. $y^2-x^2=C$. 2759. $y=Ce^{\frac{x}{a}}$. 2760. $y^2=2px$.

2761. $y=ax^2$. Indication. Par hypothèse $\frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx}=\frac{3}{4}x$. En dérivant deux fois par rapport à x, on en déduit l'équation différentielle. 2762. $y^2=\frac{1}{3}x$. 2763. $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2}$. 2764. Le faisceau des droites $y=kx$. 2765. La famille d'ellipses homofocales $2x^2+y^2=C^2$. 2766. La famille d'hyperboles $x^2-y^2=C$. 2767. La famille de cercles $x^2+(y-b)^2=b^2$. 2768. $y=x\ln\frac{C}{x}$. 2769. $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$. 2770. $x=Ce^{\frac{x}{y}}$. 2771. $(x-C)^2-y^2=C^2$; $(x-2)^2-y^2=4$; $y=\pm x$. 2772. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$. 2773. $y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2C}$; $x=0$. 2774. $(x^2+y^2)^3(x+y)^2=C$. 2775. $y=x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$. 2776. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. 2777. $3x+y+2\ln|x+y-1|=C$. 2778. $\ln|4x+8y+5|+8y-4x=C$. 2779. $x^2=1-2y$. 2780. Le paraboloïde de révolution. Solution. D'après la symétrie le miroir est une surface de révolution. On fait coïncider l'origine des coordonnées avec la source lumineuse ; l'axe OX est dirigé suivant le faisceau de rayons. Si la tangente en un point arbitraire $M(x, y)$ de la courbe intersection de la surface cherchée avec le plan XOY forme avec l'axe OX l'angle φ et le segment joignant l'origine des coordonnées au point $M(x, y)$ l'angle α, alors $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$. Or, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$, $\operatorname{tg}\varphi=y'$. L'équation différentielle cherchée est $y-yy'^2=2xy'$ et sa solution est $y^2=2Cx+C^2$. La section plane est une parabole. La surface cherchée est donc un paraboloïde de révolution. 2781. $(x-y)^2-Cy=0$. 2782. $x^2=C(2y+C)$. 2783. $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. Indication. Prendre en considération que l'aire est $\int_a^x y\,dx$. 2784. $y=Cx-x\ln|x|$. 2785. $y=Cx+x^2$. 2786. $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}$. 2787. $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C$. Indication. L'équation est linéaire par rapport à x et $\frac{dx}{dy}$. 2788. $x=Cy^2-\frac{1}{y}$. 2789. $y=\frac{e^x}{x}+\frac{ab-e^a}{x}$. 2790. $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 2791. $y=\frac{x}{\cos x}$. 2792. $y(x^2+Cx)=1$.

2793. $y^2 = x \ln \frac{C}{x}$. 2794. $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$. 2795. $y^3 (3 + Ce^{\cos x}) = x$. 2797. $xy = Cy^2 + a^2$. 2798. $y^2 + x + ay = 0$. 2799. $x = y \ln \frac{y}{a}$. 2800. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$. 2801. $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$. 2802. $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$. 2803. $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$. 2804. $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$. 2805. $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$. 2806. $x^2 - y^2 = Cy^3$. 2807. $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. 2808. $\ln |x| - \frac{y^2}{x} = C$. 2809. $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$. 2810. $\frac{1}{y} \ln x + \frac{1}{2} y^2 = C$. 2811. $(x \sin y + y \cos y - \sin y) e^x = C$. 2812. $(x^2C^2 + 1 - 2Cy)(x^2 + C^2 - 2Cy) = 0$; l'intégrale singulière est $x^2 - y^2 = 0$. 2813. L'intégrale générale est $(y + C)^2 = x^3$; il n'y a pas d'intégrale singulière. 2814. L'intégrale générale est $\left(\frac{x^2}{2} - y + C\right)\left(x - \frac{y^2}{2} + C\right) = 0$; il n'y a pas d'intégrale singulière. 2815. L'intégrale générale est $y^2 + C^2 = 2Cx$; l'intégrale singulière est $x^2 - y^2 = 0$. 2816. $y = \frac{1}{2} \cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$. 2817. $\begin{cases} x = \sin p + \ln p, \\ y = p \sin p + \cos p + p + C. \end{cases}$ 2818. $\begin{cases} x = e^p + pe^p + C, \\ y = p^2 e^p. \end{cases}$ La solution singulière est $y = 0$. 2819. $\begin{cases} x = 2p - \frac{2}{p} + C, \\ y = p^2 + 2 \ln p. \end{cases}$

2820. $4y = x^2 + p^2$, $\ln |p - x| = C + \frac{x}{p - x}$.

2821. $\ln \sqrt{p^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{p}{y} = C$, $x = \ln \frac{y^2 + p^2}{2}$. La solution singulière est $y = e^x$. 2822. $y = \frac{1}{2} Cx^2 + \frac{2}{C}$; $y = \pm 2x$.

2823. $\begin{cases} x = \ln |p| - \arcsin p + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$ 2824. $\begin{cases} x = Ce^{-p} - 2p + 2, \\ y = C(1 + p) e^{-p} - p^2 + 2. \end{cases}$

2825. $\begin{cases} x = \frac{1}{3} (Cp^{-\frac{1}{2}} - p), \\ y = \frac{1}{6} (2Cp^{\frac{1}{2}} + p^2). \end{cases}$ Indication. L'équation différentielle, qui permet de déterminer x comme fonction de p, est homogène. 2826. $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. 2827. $y = Cx + C$; il n'y a pas de solution singulière. 2828. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = 1$. 2829. $y = Cx + \frac{1}{C}$; $y^2 = 4x$. 2830. $xy = C$. 2831. La circonférence et la famille de ses tangentes. 2832. L'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 2833. a)

Homogène, $y=xu$; b) linéaire par rapport à x ; $x=uv$; c) linéaire par rapport à y ; $y=uv$; d) équation de Bernoulli ; $y=uv$; e) à variables séparables ; f) équation de Clairaut ; la mettre sous la forme $y=xy'\pm\sqrt{y'^3}$; g) équation de Lagrange ; dériver par rapport à x ; h) équation de Bernoulli ; $y=uv$; i) se ramène à une équation à variables séparables ; $u=x+y$; j) équation de Lagrange; dériver par rapport à x ; k) équation de Bernoulli par rapport à x ; $x=uv$; l) équation différentielle totale ; m) linéaire ; $y=uv$; n) équation de Bernoulli ; $y=uv$. 2834. a) $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$; b) $x=y\cdot e^{Cy+1}$.

2835. $x^2+y^4=Cy^2$. 2836. $y=\frac{x}{x^2+C}$. 2837. $xy\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)=1$. 2838. $y=Cx+C\ln C$; la solution singulière est $y=e^{-(x+1)}$. 2839. $y=Cx+\sqrt{-aC}$, la solution singulière est $y=\frac{a}{4x}$. 2840. $3y+\ln\frac{|x^3-1|}{(y+1)^6}=C$. 2841. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\operatorname{arctg} y-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$.

2842. $y=x^2(1+Ce^{\frac{1}{x}})$. 2843. $x=y^2(C-e^{-y})$. 2844. $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$. 2845. $y=ax+C\sqrt{1-x^2}$. 2846. $y=\frac{x}{x+1}(x+\ln|x|+C)$.

2847. $x=Ce^{\sin y}-2a(1+\sin y)$. 2848. $\frac{x^2}{2}+3x+y+\ln[(x-3)^{10}\times|y-1|^3]=C$. 2849. $2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{2x}=\ln Cx$. 2850. $x^2=1-\frac{2}{y}+Ce^{-\frac{2}{y}}$.

2851. $x^3=Ce^y-y-2$. 2852. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$. 2853. $y=x\arcsin(Cx)$.

2854. $y^2=Ce^{-2x}+\frac{2}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x$. 2855. $xy=C(y-1)$. 2856. $x=Ce^y-\frac{1}{2}(\sin y+\cos y)$. 2857. $py=C(-p1)$. 2858. $x^4=Ce^{4y}-y^3-\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{8}y-\frac{3}{32}$. 2859. $(xy+C)(x^2y+C)=0$. 2860. $\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x}{y}=C$.

2861. $xe^y-y^2=C$. 2862. $\begin{cases} x=\frac{C}{p^2}-\frac{\sqrt{1+p^2}}{2p}+\frac{1}{2p^2}\ln(p+\sqrt{1+p^2}), \\ y=2px+\sqrt{1+p^2}. \end{cases}$

2863. $y=xe^{Cx}$. 2864. $2e^x-y^4=Cy^2$. 2865. $\ln|y+2|+2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}=C$.

2866. $y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{x}-2=0$. 2867. $x^2\cdot y=Ce^{\frac{y}{a}}$. 2868. $x+\frac{x}{y}=C$.

2869. $y=\frac{C-x^4}{4(x^2-1)^{3/2}}$. 2870. $y=C\sin x-a$.

2871. $y=\frac{a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$. 2872. $(y-Cx)\cdot(y^2-x^2+C)=0$.

2873. $y=Cx+\frac{1}{C^2}$; $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$. 2874. $x^3+x^2y-y^2x-y^3=C$. 2875. $p^2+4y^2=Cy^3$. 2876. $y=x-1$. 2877. $y=x$. 2878. $y=2$. 2879. $y=0$. 2880. $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$. 2881. $y=\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)$. 2882. $y=e^{-x}+2x-2$. 2883. a) $y=x$; b) $y=Cx$, où C est arbitraire; le point (0; 0) est un point singulier de l'équation différentielle. 2884. a) $y^2=x$; b) $y^2=2px$; (0; 0) est un point singulier. 2885. a) $(x-C)^2+y^2=C^2$; b) il n'y a pas de solution; c) $x^2+y^2=x$; (0; 0) est un point singulier. 2886. $y=e^{\frac{x}{y}}$. 2887. $y=(\sqrt{2a}\pm\sqrt{x})^2$. 2888. $y^2=1-e^{-x}$. 2889. $r=Ce^{a\varphi}$. Indication. Passer aux coordonnées polaires. 2890. $3y^2-2x=0$. 2891. $r=k\varphi$. 2892. $x^2+(y-b)^2=b^2$. 2893. $y^2+16x=0$. 2894. L'hyperbole $y^2-x^2=C$ ou le cercle $x^2+y^2=C^2$. 2895. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$. Indication. Prendre en considération que l'aire est $\int_0^x y\,dx$ et la longueur de l'arc $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$. 2896. $x=\frac{a}{y}+Cy$. 2897. $y^2=4C(C+a-x)$. 2898. Indication. Avoir en vue que la résultante de la force de pesanteur et de la force centrifuge est normale à la surface. En faisant passer l'axe OY par l'axe de révolution et en désignant par ω la vitesse angulaire de rotation on trouve pour une section axiale plane de la surface cherchée l'équation différentielle $g\frac{dy}{dx}=\omega^2x$. 2899. $p=e^{-0,000167h}$. Indication. On peut admettre que la pression à chaque niveau d'une colonne d'air verticale est déterminée seulement par la pression des couches qui lui sont supérieures. Utiliser la loi de Boyle-Mariotte, d'après laquelle la densité est proportionnelle à la pression. L'équation différentielle cherchée est $dp=-kp\,dh$. 2900. $s=\frac{1}{2}klw$. Indication. L'équation est $ds=kw\cdot\frac{l-x}{l}dx$. 2901. $s=\left(p+\frac{1}{2}w\right)kl$. 2902. $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$. 2903. Dans une heure. 2904. $\omega=100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ t/m. 2905. En 100 ans il se désintègre 4,2% de la quantité initiale Q_0. Indication. L'équation est $\frac{dQ}{dt}=kQ\cdot Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$. 2906. $t\approx 35,2$ s. Indication. L'équation est $\pi(h^2-2h)\,dh=\pi\left(\frac{1}{10}\right)^2 v\,dt$. 2907. $\frac{1}{1024}$. Indication. L'équation est $dQ=-kQ\,dh$. $Q=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{3}}$. 2908. $v\to\sqrt{\frac{gm}{k}}$ pour $t\to\infty$

(k est un coefficient de proportionnalité). Indication. L'équation est $m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2$; $v=\sqrt{\frac{gm}{k}}\,\mathrm{th}\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$. 2909. 18,1 kg. Indication. L'équation est $\frac{dx}{dt}=k\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{300}\right)$. 2910. $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left[(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right]$. Indication. L'équation est $Ri+L\frac{di}{dt}=E\sin\omega t$. 2911. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2$. 2912. $1+C_1'^2=\left(C_2+\frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$. 2913. $y=\ln|e^{2x}+C_1|-x+C_2$. 2914. $y=C_1+C_2\ln|x|$. 2915. $y=C_1e^{C_2x}$. 2916. $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$. 2917. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$. 2918. $(x-C_1)=a\ln\left|\sin\frac{y-C_2}{a}\right|$. 2919. $y=\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C_1\ln|x|+C_2$. 2920. $x=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|+C_2$, $y=C$. 2921. $y=C_1e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$. 2922. $y=\pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}\right]+C_2$. 2923. $y=(C_1e^x+1)x+C_2$. 2924. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$; $y=\frac{e}{2}x^2+C$ (solution singulière). 2925. $y=C_1x\times(x-C_1)+C_2$; $y=\frac{x^3}{3}+C$ (solution singulière). 2926. $y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. 2927. $y=\pm\sin(C_1\pm x)+C_2x+C_3$. 2928. $y=x^3+3x$. 2929. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$. 2930. $y=x+1$. 2931. $y=Cx^2$. 2932. $y=C_1\frac{1+C_2e^x}{1-C_2e^x}$; $y=C$. 2933. $x=C_1+\ln\left|\frac{y-C_2}{y+C_2}\right|$. 2934. $x=C_1-\frac{1}{C_2}\ln\left|\frac{y}{y+C_2}\right|$. 2935. $x=C_1y^2+y\ln y+C_2$. 2936. $2y^2-4x^2=1$. 2937. $y=x+1$. 2938. $y=\frac{x^2-1}{2(e^2-1)}-\frac{e^2-1}{4}\ln|x|$ ou $y=\frac{1-x^2}{2(e^2+1)}+\frac{e^2+1}{4}\ln|x|$. 2939. $y=\frac{1}{2}x^2$. 2940. $y=\frac{1}{2}x^2$. 2941. $y=2e^x$. 2942. $x=-\frac{3}{2}(y+2)^{\frac{2}{3}}$. 2943. $y=e^x$. 2944. $y^2=\frac{e}{e-1}+\frac{e^{-x}}{1-e}$. 2945. $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}$. 2946. $y=\frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}$. 2947. $y=\sec^2x$. 2948. $y=\sin x+1$. 2949. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}$. 2950. $x=-\frac{1}{2}e^{-y^2}$. 2951. Il n'y a pas de solution. 2952. $y=e^x$. 2953. $y=2\ln|x|-\frac{2}{x}$. 2954. $y=$

$= \frac{(x+C_1^2+1)^2}{2} + \frac{4}{3} C_1 (x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$. La solution singulière est $y=C$. 2955. $y = C_1 \frac{x^2}{2} + (C_1 - C_1^2) x + C_2$. La solution singulière est $y = \frac{(x+1)^3}{12} + C$. 2956. $y = \frac{1}{12}(C_1+x)^4 + C_2 x + C_3$. 2957. $y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}$; $y = 1 - e^x$; $y = -1 + e^{-x}$; la solution singulière est $y = \frac{4}{C-x}$. 2958. Les circonférences. 2959. $(x-C_1)^2 - C_2 y^2 + kC_2^2 = 0$. 2960. La chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x-x_0}{2}$. Le cercle $(x-x_0)^2 + y^2 = a^2$. 2961. La parabole $(x-x_0)^2 = 2ay - a^2$. La cycloïde $x - x_0 = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. 2962. $e^{ay+C_2} = \sec(ax + C_1)$. 2963. Parabole. 2964. $y = \frac{C_1}{2} \frac{H}{q} e^{\frac{q}{H}x} + \frac{1}{2C_1} \frac{H}{q} e^{-\frac{q}{H}x} + C_2 = a \operatorname{ch} \frac{x+C}{a} + C_2$, où H est la tension horizontale constante et $\frac{H}{q} = a$. Indication. L'équation différentielle est $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. 2965. L'équation du mouvement est $\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. La loi du mouvement est $s = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. 2966. $s = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch}\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. Indication. L'équation du mouvement est $m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$. 2967. Dans 6,45 s. Indication. L'équation du mouvement est $\frac{300}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -10\,v$. 2968. a) non; b) oui; c) oui; d) oui; e) non; f) non; g) non; h) oui. 2969. a) $y'' + y = 0$; b) $y'' - 2y' + y = 0$; c) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; d) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. 2970. $y = 3x - 5x^2 + 2x^3$. 2971. $y = \frac{1}{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$. Indication. Faire la substitution $y = y_1 u$. 2972. $y = C_1 x + C_2 \ln x$. 2973. $y = A + Bx^2 + x^3$. 2974. $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$. Indication. Les solutions particulières de l'équation homogène sont $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$. La méthode de la variation des constantes arbitraires donne $C_1 = \frac{x}{2} + A$; $C_2 = -\frac{x^3}{6} + B$. 2975. $y = A + B\sin x + C\cos x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \sin x \ln|\cos x| - x\cos x$. 2976. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. 2977. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$. 2978. $y = C_1 + C_2 e^x$. 2979. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 2980. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. 2981. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. 2982. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. 2983. $y = e^{2x}(C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}})$. 2984. Si $k > 0$, $y = C_1 e^{x\sqrt{k}} + C_2 e^{-x\sqrt{k}}$; si $k < 0$, $y = C_1 \cos\sqrt{-k}\,x + C_2 \sin\sqrt{-k}\,x$. 2985. $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} +$

$+C_2e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$). 2986. $y=e^{\frac{x}{6}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{6}x+C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$. 2987. $y=4e^x+e^{4x}$. 2988. $y=e^{-x}$. 2989. $y=\sin 2x$. 2990. $y=1$. 2991. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. 2992. $y=0$. 2993. $y=C\sin\pi x$. 2994. a) $xe^{2x}(Ax^2+Bx+C)$, b) $A\cos 2x+B\sin 2x$; c) $A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2e^{2x}$; d) $e^x(A\cos x+B\sin x)$; e) $e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$; f) $xe^x[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\sin 2x]$. 2995. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$. 2996. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^3+3x^2$. 2997. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$. 2998. $y=C_1e^x+C_2e^{7x}+2$. 2999. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$. 3000. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$. 3001. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\sin 2x+\cos 2x)$. 3002. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$. 3003. $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$. 3004. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos 2x-\sin 2x)$. 3005. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{x}{4}e^x\sin 2x$. 3006. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$. 3007. 1) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{A}{\omega^2-p^2}\sin pt$; 2) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t-\frac{A}{2\omega}t\cdot\cos\omega t$. 3008. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}-xe^{4x}$. 3009. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$. 3010. $y=e^x(C_1+C_2x+x^2)$. 3011. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{5}{2}x$. 3012. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{5}(3\cos 2x+\sin 2x)$. 3013. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^x+\frac{5}{2}x^2-5x$. 3014. $y=C_1+C_2e^x-3xe^x-x-x^2$. 3015. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$. 3016. $y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^x+\frac{1}{37}(\sin 3x+6\cos 3x)+\frac{e^x}{9}$. 3017. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$. 3018. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)-\frac{x^3}{6}-\frac{x}{9}$. 3019. $y=\frac{1}{8}e^{2x}(4x+1)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$. 3020. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x\sin x-\cos x$. 3021. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$. 3022. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}(3\sin 2x+2\cos 2x)+\frac{1}{4}$. 3023. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x)$. 3024. $y=$

$=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^x$. 3025. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+$ $+\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{16}\cos x+\frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$. 3026. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+$ $+\frac{1}{9}(2-3x)+\frac{1}{16}(2x^2-x)e^{3x}$. 3027. $y=C_1+C_2e^{2x}-2xe^x-\frac{3}{4}x-$ $-\frac{3}{4}x^2$. 3028. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$. 3029. $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-$ $-\frac{1}{8}(2x^2+x)e^{-3x}+\frac{1}{16}(2x^2+3x)e^x$. 3030. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+\frac{x}{4}\cos x+\frac{x^2}{4}\sin x-\frac{x}{8}\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x$. Indication. Transformer le produit des cosinus en somme de cosinus. 3031. $y=$ $=C_1e^{-x\sqrt{2}}+C_2e^{x\sqrt{2}}+xe^x\sin x+e^x\cos x$. 3032. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+\cos x\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 3033. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 3034. $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$. 3035. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$. 3036. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$. 3037. $y=$ $=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$. 3038. a) $y=C_1e^x+$ $+C_2e^{-x}+(e^x+e^{-x})\operatorname{arctg}e^x$; b) $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+e^{x^2}$. 3040. L'équation du mouvement est $\frac{2}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2-k(x+2)$; $(k=1)$; $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ s. 3041. $x=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}\,t}{g-900}$ cm. Indication. Si on mesure x à partir de la position de repos de la charge, on a $\frac{4}{g}x''=4-k(x_0+x-y-l)$, où x_0 est la distance du point de repos de la charge au point initial de suspension du ressort, l est la longueur du ressort à l'état de repos; donc $k(x_0-l)=4$, par conséquent, $\frac{4}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y)$, où $k=4$, $g=981$ cm/s². 3042. $m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-$ $-k(b+x)$ et $x=c\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$. 3043. $6\frac{d^2s}{dt^2}=gs$; $t=$ $=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$. 3044. a) $r=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$; b) $r=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-$ $-e^{-\omega t})$. Indication. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2r$. 3045. $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{12x}$. 3046. $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^x$. 3047. $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 3048. $y=C_1+$ $+C_2x+C_3e^{x\sqrt{2}}+C_4e^{-x\sqrt{2}}$. 3049. $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$. 3050. $y=$ $=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$. 3051. $y=$ $=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$. 3052. $y=C_1+C_2e^{-x}+$ $+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 3053. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+$

$+(C_3+C_4x)\,e^x$. **3054.** $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. **3055.** $y=(C_1+C_2x)\,e^{\sqrt{3x}}+(C_3+C_4x)\,e^{-\sqrt{3x}}$. **3056.** $y=C_1+C_2x+$ $+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. **3057.** $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\,e^{-x}$. **3058.** $y=$ $=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. **3059.** $y=e^{-x}(C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1})$. **3060.** $y=C_1+C_2x+\left(C_3+C_4x+\frac{x^2}{2}\right)e^x$. **3061.** $y=C_1+C_2x+12x^2+$ $+3x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{20}x^5+(C_3+C_4x)\,e^x$. **3062.** $y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\right.$ $\left.+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-x^3-5$. **3063.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+$ $+\frac{1}{1088}(4\cos 4x-\sin 4x)$. **3064.** $y=C_1e^{-x}+C_2+C_3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+$ $+\frac{1}{12}x^4+e^x\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)$. **3065.** $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+$ $+e^x\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}\right)$. **3066.** $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+\sec x+\cos x\ln|\cos x|-$ $-\operatorname{tg}x\sin x+x\sin x$. **3067.** $y=e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$ $+x-2$. **3068.** $y=(C_1+C_2\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. **3069.** $y=C_1x^3+\frac{C_2}{x}$. **3070.** $y=$ $=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)$. **3071.** $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. **3072.** $y=$ $=C_1+C_2(3x+2)^{-4/3}$. **3073.** $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}$. **3074.** $y=C_1\cos(\ln x)+$ $+C_2\sin(\ln x)$. **3075.** $y=C_1x^3+C_2x^2+\frac{1}{2}x$. **3076.** $y=(x+1)^2[C_1+$ $+C_2\ln(x+1)]+(x+1)^3$. **3077.** $y=x(\ln x+\ln^2 x)$. **3078.** $y=C_1\cos x+$ $+C_2\sin x,\quad z=C_2\cos x-C_1\sin x$. **3079.** $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $z=\frac{1}{5}e^{-x}[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x]$. **3080.** $y=(C_1-C_2-C_1x)\,e^{-2x}$, $z=(C_1x+C_2)\,e^{-2x}$. **3081.** $x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$,

$$y=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{C_2\sqrt{3}+C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$z=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3082. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t},\quad y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t},\quad z=-(C_1+C_3)\,e^{-t}+C_2e^{2t}$. **3083.** $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x),\qquad z=C_2e^{2x}-C_1+\frac{1}{4}(x^2-x-1)$. **3084.** $y=C_1+C_2x+2\sin x,\quad z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x$. **3085.** $y=(C_2-2C_1-2C_2x)\,e^{-x}-6x+14,\quad z=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+5x-9$; $C_1=9,\quad C_2=4,\quad y=14(1-e^{-x})-2x(3+4e^{-x}),\quad z=-9(1-e^{-x})+$ $+x(5+4e^{-x})$. **3086.** $x=10e^{2t}-8e^{3t}-e^t+6t-1$; $y=-20e^{2t}+8e^{3t}+$

$+3e^t+12t+10$. **3087.** $y=\frac{2C_1}{(C_2-x)^2}$, $z=\frac{C_1}{C_2-x}$. **3088*.** a) $\frac{(x^2+y^2)y}{x^2}=C_1$, $\frac{z}{y}=C_2$; b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_1$, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$. Indication. En intégrant l'équation homogène $\frac{dx}{x-y}=\frac{dx}{x+y}$, on trouve *l'intégrale première* $\ln\sqrt{x^2+p^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$. Puis, ayant recours aux propriétés des proportions différentielles on a $\frac{dz}{z}=\frac{x\,dx}{x(x-y)}=$ $=\frac{y\,dy}{y(x+y)}=\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. D'où $\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\ln C_2$ et, par conséquent, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$; c) $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=6$. Indication. En appliquant les propriétés des proportions différentielles on a: $\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$; d'où $dx+dy+dz=0$ et, par conséquent, $x+y+z=C_1$. De même, $\frac{x\,dx}{x(y-z)}=\frac{y\,dy}{y(z-x)}=\frac{z\,dz}{z(x-y)}=$ $=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0}$; $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$ et $x^2+y^2+z^2=C_2$. Ainsi, les courbes intégrales sont les circonférences $x+y+z=C_1$, x^2+y^2+ $+z^2=C_2$. Les conditions initiales $x=1$, $y=1$, $z=-2$ donnent $C_1=0$, $C_2=6$. **3089.** $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{18}(3\ln^2 x-2\ln x)$, $z=1-$ $-2C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x}{9}(3\ln^2 x+\ln x-1)$. **3090.** $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+$ $+C_3\cos x+C_4\sin x+e^x-2x$, $z=-C_1e^{x\sqrt{2}}-C_2e^{-x\sqrt{2}}-\frac{C_3}{4}\cos x-$ $-\frac{C_4}{4}\sin x-\frac{1}{2}e^x+x$. **3091.** $x=\frac{v_0m\cos\alpha}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y=$ $=\frac{m}{k^2}(kv_0\sin\alpha+mg)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)-\frac{mgt}{k}$. Solution. $m\frac{dv_x}{dt}=$ $=-kv_x$, $m\frac{dv_y}{dt}=-kv_y-mg$ avec les conditions initiales: pour $t=0$, $x_0=y_0=0$, $v_{x_0}=v_0\cos\alpha$, $v_{y_0}=v_0\sin\alpha$. En intégrant on trouve $v_x=v_0\cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t}$, $kv_y+mg=(kv_0\sin\alpha+mg)\,e^{-\frac{k}{m}t}$. **3092.** $x=$ $=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}$, $y=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. Indication. Les équations différentielles du mouvement sont: $m\frac{d^2x}{dt^2}=$ $=-k^2x$; $m\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2y$. **3093.** $y=-2-2x-x^2$. **3094.** $y=$

$= \left(y_0 + \frac{1}{4}\right) e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. 3095. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \ldots$ 3096. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7\cdot 9}x^7 + \frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11} - \ldots$ 3097. $y = x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots$; la série converge pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 3098. $y = x - \frac{x^2}{(1!)^2\cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2\cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2\cdot 4} + \ldots$; la série converge pour $-\infty < x < +\infty$. Indication. Appliquer la méthode des coefficients indéterminés. 3099. $y = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots$; la série converge pour $-\infty < x < +\infty$. 3100. $y = \frac{\sin x}{x}$. Indication. Appliquer la méthode des coefficients indéterminés. 3101. $y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$; la série converge pour $|x| < \infty$. Indication. Appliquer la méthode des coefficients indéterminés. 3102. $x = a\left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{2}{4!}t^4 - \frac{9}{6!}t^6 + \frac{55}{8!}t^8 - \ldots\right)$. 3103. $u = A\cos\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$. Indication. Utiliser les conditions $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = A\sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$. 3104. $u = \frac{2l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1 - \cos n\pi)\sin\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$. Indication. Utiliser les conditions: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 1$. 3105. $u = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi a t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$. Indication. Utiliser les conditions: $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} & \text{pour } 0 < x \leqslant \frac{l}{2}, \\ 2h\left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{pour } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$ 3106. $u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l} \times \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$, où les coefficients sont $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x}{l} \times \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx$. Indication. Utiliser les conditions:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \frac{x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

3107. $u=\frac{400}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{100}\cdot e^{-\frac{a^2n^2\pi^2 t}{100^2}}$. Indication. Utiliser les conditions $u(0, t)=0$, $u(100, t)=0$, $u(x, 0)=0{,}01x(100-x)$.

Chapitre X

3108. a) $\leqslant 1''$; $\leqslant 0{,}0023\%$; b) $\leqslant 1$ *mm*; $\leqslant 0{,}26\%$; c) $\leqslant 1$ *g*; $\leqslant 0{,}0016\%$. 3109. a) $\leqslant 0{,}05$; $\leqslant 0{,}021\%$; b) $\leqslant 0{,}0005$; $\leqslant 1{,}45\%$; c) $\leqslant 0{,}0005$; $\leqslant 0{,}16\%$. 3110. a) deux chiffres; $48\cdot 10^3$ ou $49\cdot 10^3$, puisque le nombre est compris entre 47 877 et 48 845; b) deux chiffres; 15; c) un chiffre; $6\cdot 10^2$. Du point de vue pratique il y a lieu de mettre le résultat sous la forme $(5{,}9\pm 0{,}1)\cdot 10^2$. 3111. a) 29,5; b) $1{,}6\cdot 10^2$; c) 43,2. 3112. a) 84,2; b) 18,5 ou $18{,}47\pm 0{,}01$; c) le résultat de la soustraction n'a pas de chiffres exacts puisque la différence est égale à un centième pour une erreur absolue permise d'un centième. 3113*. $1{,}8\pm 0{,}3$ *cm*². Indication. Appliquer la formule qui donne l'accroissement de l'aire du carré. 3114. a) $30{,}0\pm 0{,}2$; b) $43{,}7\pm 0{,}1$; c) $0{,}3\pm 0{,}1$. 3115. $19{,}9\pm 0{,}1$ *m*². 3116. a) $1{,}1295\pm 0{,}0002$; b) $0{,}120\pm 0{,}006$; c) le quotient oscille entre 48 et 62. Par conséquent, dans le nombre qui donne le quotient aucune décimale ne peut être considérée comme exacte. 3117. 0,480. Le dernier chiffre peut osciller d'une unité. 3118. a) 0,1729; b) $277\cdot 10^3$; c) 2. 3119. $(2{,}05\pm 0{,}01)\cdot 10^3$ *cm*². 3120. a) 1,648; b) $4{,}025\pm 0{,}001$; c) $9{,}006\pm 0{,}003$. 3121. $4{,}01\cdot 10^3$ *cm*². L'erreur absolue est 6,5 *cm*². L'erreur relative est 0,16%. 3122. Le côté de l'angle droit est égal à $13{,}8+0{,}2$ *cm*, $\sin\alpha=0{,}44\pm 0{,}01$; $\alpha=26°15'\pm 35'$. 3123. $2{,}7\pm 0{,}1$. 3124. 0,27*A*. 3125. Il faut mesurer la longueur du pendule à 0,3 *cm* près; on prend trois chiffres pour les nombres π et g (d'après le principe d'équiinfluence). 3126. Mesurer les rayons et la génératrice avec une erreur relative de 1/300. On prend deux chiffres après la virgule pour le nombre π (d'après le principe d'équiinfluence). 3127. Mesurer la grandeur l à 0,2% près et la grandeur s à 0,7% près (d'après le principe d'équiinfluence).

3128.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	3	7	—2	—6	14	—23
2	10	5	—8	8	—9	
3	15	—3	0	—1		
4	12	—3	—1			
5	9	—4				
6	5					

3129.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	—4	—12	32	48
3	—16	20	80	48
5	4	100	128	48
7	104	228	176	
9	332	404		
11	736			

3130.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	—4	—42	—24	24
1	—4	—46	—66	0	24
2	—50	—112	—66	24	24
3	—162	—178	—42	48	24
4	—340	—220	6	72	24
5	—560	—214	78	96	24
6	—774	—136	174	120	24
7	—910	38	294	144	
8	—872	332	438		
9	—540	770			
10	230				

Indication. Calculer les cinq premières valeurs de y et ayant obtenu $\Delta^4 y_0 = 24$ répéter le nombre 24 dans toute la colonne des différences du quatrième ordre. Après quoi le restant du tableau est complété à l'aide d'additions (en se déplaçant de droite à gauche).

3131. a) 0,211 ; 0,389 ; 0,490 ; 0,660 ; b) 0,229 ; 0,399 ; 0,491 ; 0,664. **3132.** 0,1822 ; 0,1993 ; 0,2165 ; 0,2334 ; 0,2503. **3133.** $1+x+x^2+x^3$. **3134.** $y=\frac{1}{96}x^4-\frac{11}{48}x^3+\frac{65}{24}x^2-\frac{85}{12}x+8$; $y\approx 22$ pour $x=5{,}5$; $y=20$ pour $x\approx 5{,}2$. Indication. En calculant x pour $y=20$ prendre $y_0=11$. **3135.** Le polynôme d'interpolation est $y=x^2-10x+1$; $y=1$ pour $x=0$. **3136.** 158 *kg* (approximativement). **3137.** a) $y(0{,}5)=-1$, $y(2)=11$; b) $y(0{,}5)\doteq-\frac{15}{16}$, $y(2)=-3$. **3138.** $-1{,}325$. **3139.** 1,01. **3140.** $-1{,}86$; $-0{,}25$; 2,11. **3141.** 2,09. **3142.** 2,45 et 0,019. **3143.** 0,31 et 4. **3144.** 2,506. **3145.** 0,02. **3146.** 0,24. **3147.** 1,27. **3148.** $-1{,}88$; 0,35 ; 1,53. **3149.** 1,84. **3150.** 1,31 et $-0{,}67$. **3151.** 7,13. **3152.** 0,165. **3153.** $\pm 1{,}73$ et 0. **3154.** 1,72. **3155.** 1,38. **3156.** $x=0{,}83$; $y=0{,}56$; $x=-0{,}83$; $y=-0{,}56$. **3157.** $x=1{,}67$; $y=1{,}22$. **3158.** 4,493. **3159.** $\pm 1{,}1997$. **3160.** D'après la formule des trapèzes on a 11,625 ; d'après la formule de Simpson on a 11,417. **3161.** $-0{,}995$; -1 ; 0,005 ; 0,5% ; $\Delta=0{,}005$. **3162.** 0,3068 ; $\Delta=1{,}3\cdot 10^{-5}$. **3163.** 0,69. **3164.** 0,79. **3165.** 0,84. **3166.** 0,28. **3167.** 0,10. **3168.** 1,61. **3169.** 1,85. **3170.** 0,09. **3171.** 0,67. **3172.** 0,75. **3173.** 0,79. **3174.** 4,93. **3175.** 1,29. Indication. Employer les équations paramétriques de l'ellipse $x=\cos t$, $y=0{,}6222\sin t$ et ramener la formule qui donne la longueur de l'arc à la forme $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$, où ε est l'excentricité de l'ellipse. **3176.** $y_1(x)=\frac{x^3}{3}$, $y_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$, $y_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$. **3177.** $y_1(x)=\frac{x^2}{2}-x+1$, $y_2(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{2}-x+1$, $y_3(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{2}-x+1$; $z_1(x)=3x-2$, $z_2(x)=\frac{x^3}{6}-2x^2+3x-2$, $z_3(x)=\frac{7x^3}{6}-2x^2+3x-2$. **3178.** $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x-\frac{x^3}{6}$, $y_3(x)=x-\frac{x^2}{6}+\frac{x^5}{120}$. **3179.** $y(1)=3{,}36$. **3180.** $y(2)=0{,}80$. **3181.** $y(1)=3{,}72$; $z(1)=2{,}72$. **3182.** $y=1{,}80$. **3183.** 3,15 ; **3184.** 0,14. **3185.** $y(0{,}5)=3{,}15$; $z(0{,}5)=-3{,}15$. **3186.** $y(0{,}5)=0{,}55$. $z(0{,}5)=-0{,}18$. **3187.** 1,16. **3188.** 0,87. **3189.** $x(\pi)=3{,}58$; $x'(\pi)=0{,}79$. **3190.** $429+1739\cos x-1037\sin x-6321\cos 2x+1263\sin 2x-1242\cos 3x-33\sin 3x$. **3191.** $6{,}49-1{,}96\cos x+2{,}14\sin x-1{,}68\cos 2x+0{,}53\sin 2x-1{,}13\cos 3x+0{,}04\sin 3x$. **3192.** $0{,}960+0{,}851\cos x+0{,}915\sin x+0{,}542\cos 2x+0{,}620\sin 2x+0{,}271\cos 3x+0{,}100\sin 3x$. **3193.** a) $0{,}608\sin x+0{,}076\sin 2x+0{,}022\sin 3x$; b) $0{,}338+0{,}414\cos x+0{,}111\cos 2x+0{,}056\cos 3x$.

APPENDICES

I. Alphabet grec

Αα — alpha	Ηη — êta	Νν — nu	Ττ — tau
Ββ — bêta	Θθ — thêta	Ξξ — ksi	Υυ — upsilon
Γγ — gamma	Ιι — iota	Οο — omicron	Φφ — phi
Δδ — delta	Κκ — kappa	Ππ — pi	Χχ — khi
Εε — epsilon	Λλ — lambda	Ρρ — rô	Ψψ — psi
Ζζ — dzêta	Μμ — mu	Σσ — sigma	Ωω — oméga

II. Quelques constantes remarquables

Grandeur	x	$\lg x$	Grandeur	x	$\lg x$
π	3,14159	0,49715	$\frac{1}{e}$	0,36788	$\bar{1}$,56571
2π	6,28318	0,79818			
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	0,19612	e^2	7,38906	0,86859
			$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$\bar{1}$,89509	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
			$M = \lg e$	0,43429	$\bar{1}$,63778
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	$\bar{1}$,50285	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258	0,36222
π^2	9,86960	0,99430			
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	1 radian	57°17′45″	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	arc 1°	0,01745	$\bar{2}$,24188
e	2,71828	0,43429	g	9,81	0,99167

III. Grandeurs inverses, puissances, racines, logarithmes

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$ (mantisses)	$\ln x$
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	0000	0,0000
1,1	0,909	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791	0414	0,0953
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932	0792	0,1823
1,3	0,769	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066	1139	0,2624
1,4	0,714	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192	1461	0,3365
1,5	0,667	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313	1761	0,4055
1,6	0,625	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429	2041	0,4700
1,7	0,588	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540	2304	0,5306
1,8	0,556	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646	2553	0,5878
1,9	0,526	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749	2788	0,6419
2,0	0,500	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	3010	0,6931
2,1	0,476	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944	3222	0,7419
2,2	0,454	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037	3424	0,7885
2,3	0,435	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127	3617	0,8329
2,4	0,417	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214	3802	0,8755
2,5	0,400	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300	3979	0,9163
2,6	0,385	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383	4150	0,9555
2,7	0,370	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463	4314	0,9933
2,8	0,357	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542	4472	1,0296
2,9	0,345	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619	4624	1,0647
3,0	0,333	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	4771	1,0986
3,1	0,323	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768	4914	1,1314
3,2	0,312	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840	5051	1,1632
3,3	0,303	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910	5185	1,1939
3,4	0,294	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980	5315	1,2238
3,5	0,286	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047	5441	1,2528
3,6	0,278	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114	5563	1,2809
3,7	0,270	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179	5682	1,3083
3,8	0,263	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243	5798	1,3350
3,9	0,256	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306	5911	1,3610
4,0	0,250	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	6021	1,3863
4,1	0,244	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429	6128	1,4110
4,2	0,238	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489	6232	1,4351
4,3	0,233	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548	6335	1,4586
4,4	0,227	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606	6435	1,4816
4,5	0,222	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663	6532	1,5041
4,6	0,217	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719	6628	1,5261
4,7	0,213	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775	6721	1,5476
4,8	0,208	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830	6812	1,5686
4,9	0,204	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884	6902	1,5892
5,0	0,200	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	6990	1,6094
5,1	0,196	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990	7076	1,6292
5,2	0,192	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041	7160	1,6487
5,3	0,189	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093	7243	1,6677
5,4	0,185	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143	7324	1,6864

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x (mantisses)	ln x
5,5	0,182	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193	7404	1,7047
5,6	0,179	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243	7482	1,7228
5,7	0,175	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291	7559	1,7405
5,8	0,172	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340	7634	1,7579
5,9	0,169	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387	7709	1,7750
6,0	0,167	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	7782	1,7918
6,1	0,164	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481	7853	1,8083
6,2	0,161	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527	7924	1,8245
6,3	0,159	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573	7993	1,8405
6,4	0,156	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618	8061	1,8563
6,5	0,154	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662	8129	1,8718
6,6	0,151	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707	8195	1,8871
6,7	0,149	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750	8261	1,9021
6,8	0,147	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794	8325	1,9169
6,9	0,145	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837	8388	1,9315
7,0	0,143	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	8451	1,9459
7,1	0,141	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921	8513	1,9601
7,2	0,139	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963	8573	1,9741
7,3	0,137	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004	8633	1,9879
7,4	0,135	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045	8692	2,0015
7,5	0,133	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086	8751	2,0149
7,6	0,132	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126	8808	2,0281
7,7	0,130	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166	8865	2,0412
7,8	0,128	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205	8921	2,0541
7,9	0,127	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244	8976	2,0669
8,0	0,125	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	9031	2,0794
8,1	0,123	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322	9085	2,0919
8,2	0,122	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360	9138	2,1041
8,3	0,120	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398	9191	2,1163
8,4	0,119	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435	9243	2,1282
8,5	0,118	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473	9294	2,1401
8,6	0,116	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510	9345	2,1518
8,7	0,115	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546	9395	2,1633
8,8	0,114	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583	9445	2,1748
8,9	0,112	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619	9494	2,1861
9,0	0,111	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	9542	2,1972
9,1	0,110	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691	9590	2,2083
9,2	0,109	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726	9638	2,2192
9,3	0,108	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761	9685	2,2300
9,4	0,106	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796	9731	2,2407
9,5	0,105	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830	9777	2,2513
9,6	0,104	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865	9823	2,2618
9,7	0,103	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899	9868	2,2721
9,8	0,102	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933	9912	2,2824
9,9	0,101	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967	9956	2,2925
10,0	0,100	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0000	2,3026

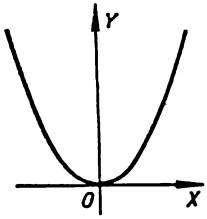
IV. Fonctions trigonométriques

$x°$	x (radians)	sin x	tg x	ctg x	cos x		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
		cos x	ctg x	tg x	sin x	x (radians)	$x°$

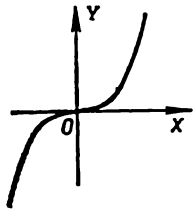
V. Fonctions exponentielles, hyperboliques et trigonométriques

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950
0,2	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801
0,3	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553
0,4	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211
0,5	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776
0,6	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253
0,7	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648
0,8	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967
0,9	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216
1,0	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403
1,1	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536
1,2	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624
1,3	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675
1,4	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700
1,5	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707
1,6	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292
1,7	5,4739	0,1827	2,6456	2,8283	0,9354	0,9917	−0,1288
1,8	6,0496	0,1653	2,9422	3,1075	0,9468	0,9738	−0,2272
1,9	6,6859	0,1496	3,2682	3,4177	0,9562	0,9463	−0,3233
2,0	7,3891	0,1353	3,6269	3,7622	0,9640	0,9093	−0,4161
2,1	8,1662	0,1225	4,0219	4,1443	0,9704	0,8632	−0,5048
2,2	9,0250	0,1108	4,4571	4,5679	0,9757	0,8085	−0,5885
2,3	9,9742	0,1003	4,9370	5,0372	0,9801	0,7457	−0,6663
2,4	11,0232	0,0907	5,4662	5,5569	0,9837	0,6755	−0,7374
2,5	12,1825	0,0821	6,0502	6,1323	0,9866	0,5985	−0,8011
2,6	13,4637	0,0743	6,6947	6,7690	0,9890	0,5155	−0,8569
2,7	14,8797	0,0672	7,4063	7,4735	0,9910	0,4274	−0,9041
2,8	16,4446	0,0608	8,1919	8,2527	0,9926	0,3350	−0,9422
2,9	18,1741	0,0550	9,0596	9,1146	0,9940	0,2392	−0,9710
3,0	20,0855	0,0498	10,0179	10,0677	0,9950	0,1411	−0,9900
3,1	22,1979	0,0450	11,0764	11,1215	0,9959	0,0416	−0,9991
3,2	24,5325	0,0408	12,2459	12,2366	0,9967	−0,0584	−0,9983
3,3	27,1126	0,0369	13,5379	13,5748	0,9963	−0,1577	−0,9875
3,4	29,9641	0,0334	14,9654	14,9987	0,9978	−0,2555	−0,9668
3,5	33,1154	0,0302	16,5426	16,5728	0,9982	−0,3508	−0,9365

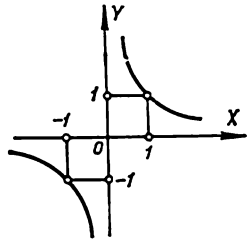
VI. Quelques courbes remarquables



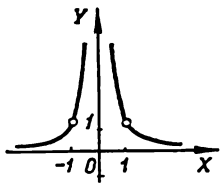
1. Parabole $y=x^2$.



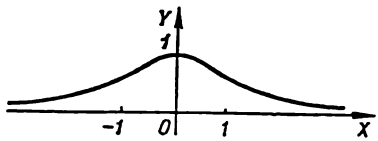
2. Parabole cubique $y=x^3$.



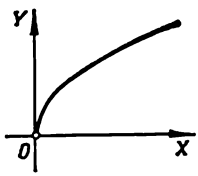
3. Hyperbole équilatère $y=\frac{1}{x}$.



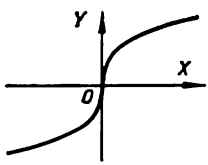
4. Fonction $y=\frac{1}{x^2}$.



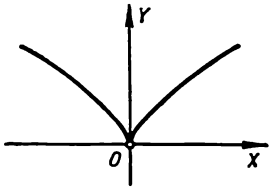
5. L'agnésienne $y=\frac{1}{1+x^2}$.



6. Parabole (branche supérieure) $y=\sqrt{x}$

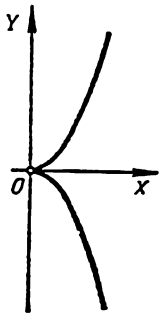


7. Parabole cubique $y=\sqrt[3]{x}$.



8a. Parabole de Neile

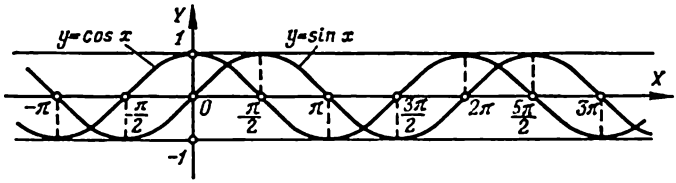
$y = x^{\frac{2}{3}}$ ou $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$



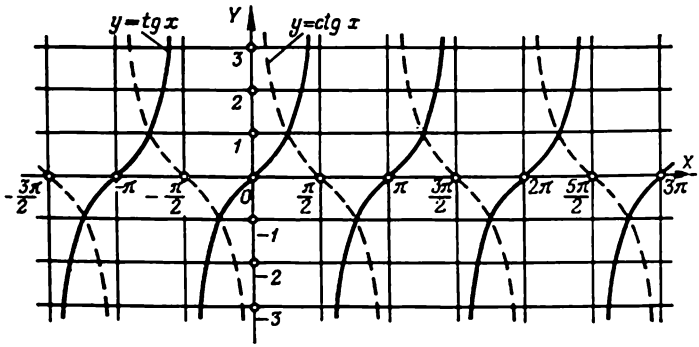
8b. Parabole semi-cubique

$y^2 = x^3$ ou

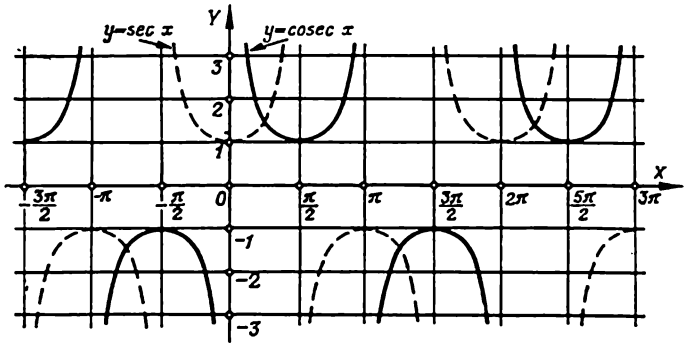
$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$



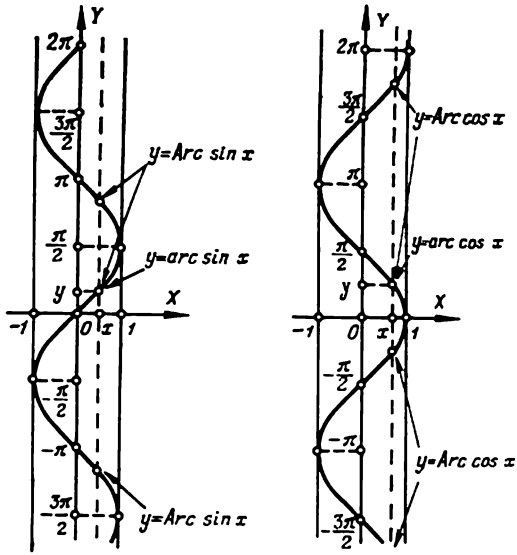
9. Sinusoïde et cosinusoïde $y = \sin x$ et $y = \cos x$.



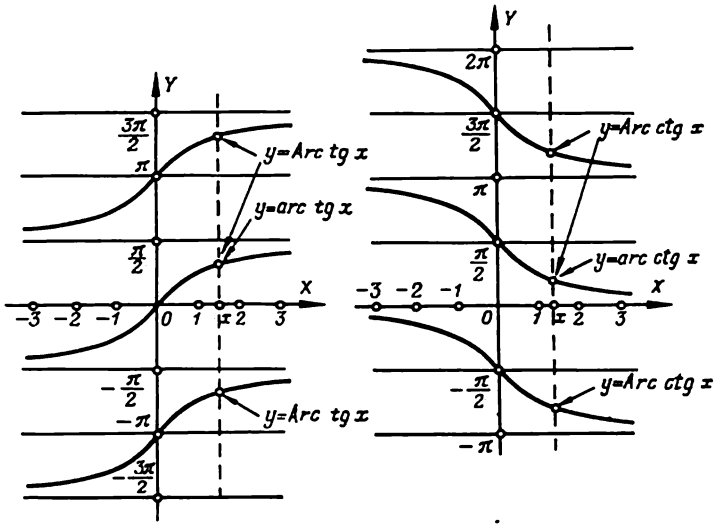
10. Tangentoïde et cotangentoïde $y = \operatorname{tg} x$ et $y = \operatorname{ctg} x$.



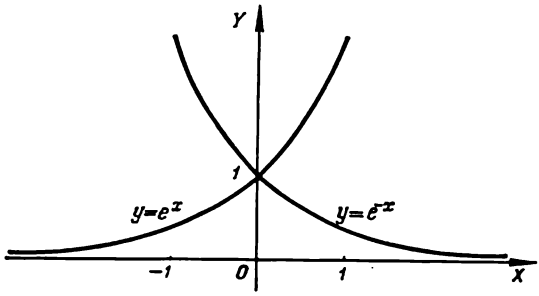
11. Graphiques des fonctions $y = \sec x$ et $y = \operatorname{cosec} x$.



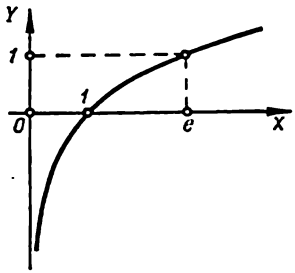
12. Graphiques des fonctions trigonométriques inverses $y = \arcsin x$ et $y = \arccos x$.



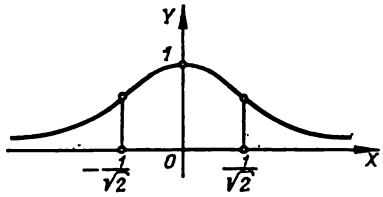
13. Graphiques des fonctions trigonométriques inverses $y = \operatorname{arctg} x$ et $y = \operatorname{arcctg} x$.



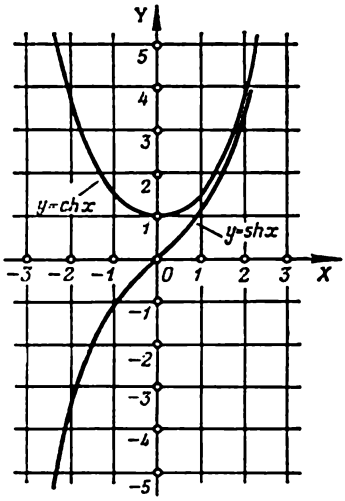
14. Graphiques des fonctions exponentielles $y = e^x$ et $y = e^{-x}$.



15. Fonction logarithmique $y = \ln x$.



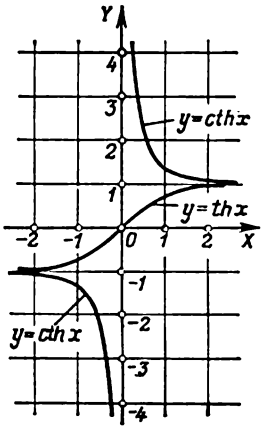
16. La courbe en « cloche » $y = e^{-x^2}$.



17. Graphiques des fonctions hyperboliques

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et}$$

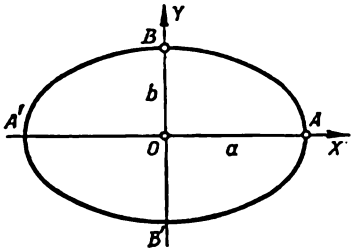
$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (chaînette).}$$

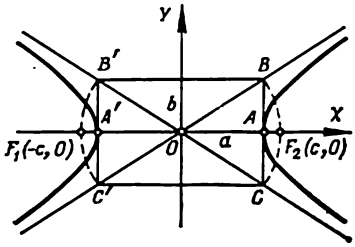


18. Graphiques des fonctions hyperboliques

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ et}$$

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$





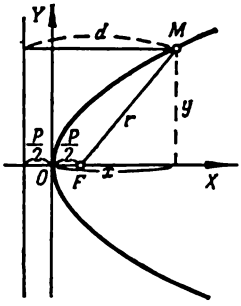
19. Ellipse

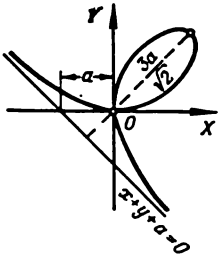
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

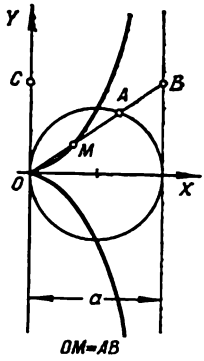
20. Hyperbole

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ou

$\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$ (pour la branche droite).







21. Parabole

$y^2=2px.$

22. Folium de Descartes

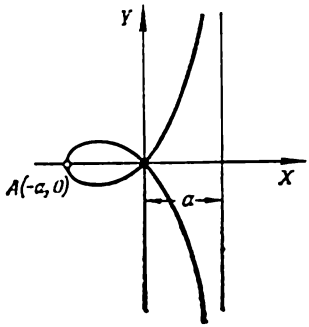
$x^3+y^3-3axy=0$ ou

$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

23. Cissoïde de Dioclès

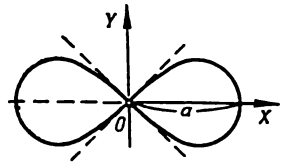
$y^2=\frac{x^3}{a-x}$ ou

$\begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$



24. Stophoïde

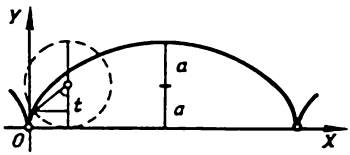
$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$



25. Lemniscate de Bernoulli

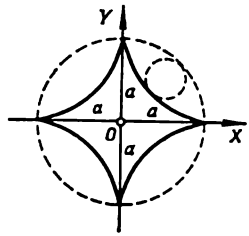
$$(x^2+y^2) = a^2(x^2-y^2)$$

ou $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.



26. Cycloïde

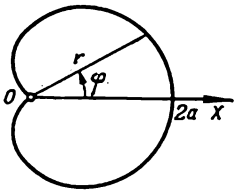
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$



27. Hypocycloïde (astroïde)

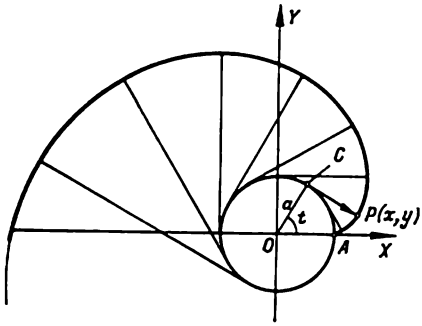
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

ou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.



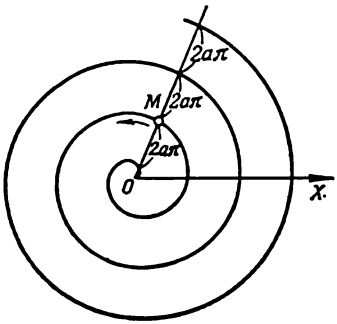
28. Carbioïde

$r = a(1 + \cos\varphi)$.

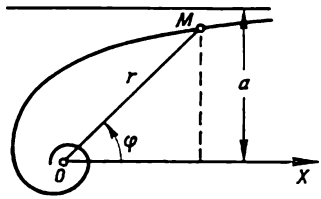


29. Développante de cercle

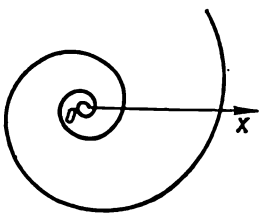
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$



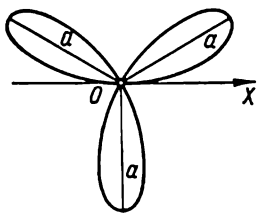
30. Spirale d'Archimède $r = a\varphi$.



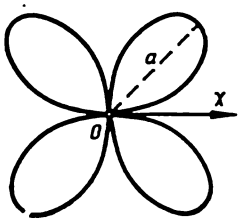
31. Spirale hyperbolique $r = \frac{a}{\varphi}$.



32. Spirale logarithmique $r = e^{a\varphi}$.



33. Rosace à trois boucles $r = a \sin 3\varphi$.



34. Rosace à quatre boucles $r = a \sin 2\varphi$.

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse:
Editions Mir,
2 Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S

Imprimé en Union Soviétique